第4卷 第2期
1984年4月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.2
April 1984

关于随机狄里克莱级数所代表的随机整函数的增长性*

毛超林

（武汉大学数学系）

设 $\{a_n(\omega)\}(n=0,1,2,\cdots)$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 上的复随机变量序列．设非负序列 $\{\lambda_n\}$ 满足

$$0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n\uparrow+\infty. \tag{1}$$

那么级数
$$f(s,\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\omega)e^{-\lambda_n s} \tag{2}$$

叫做一个随机狄里克莱级数．我们还设

$$0<m=\varliminf_{n\to\infty}(\lambda_{n+1}-\lambda_n),\ \varlimsup_{n\to\infty}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)=M<+\infty \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln|a_n(\omega)|}{\lambda_n}=-\infty\quad a.s. \tag{4}$$

在［1］中，余家荣曾研究随机狄里克莱级数在几乎必然（a.s.）收敛半平面内的增长性，推广了 G. Valiron 和 L. Arnold 的有关结果．本文的第一部分讨论了几乎必然在全平面收敛的随机狄里克莱级数所代表的整函数的 Ritt 级与系数之间的关系．本文第二部分讨论了全平面收敛的狄里克莱级数的准确级和准确型．在一定条件下，采用与 P.K.Jain ［7］不同的方法，得到了类似的结果．随后对系数取为随机变量的情形进行了讨论．

一

设（2）中 $a_n(\omega)$ 是独立随机变量．当（3）、（4）成立时，由 0－1 律知

$$\rho(\omega)=\lim_{\sigma\to-\infty}\frac{\ln\ln M(\sigma,\omega)}{-\sigma}=\rho\ (\text{常数})\ a.s.$$

其中 $M(\sigma,\omega)=\sup\limits_{-\infty<t<+\infty}|f(\sigma+it,\omega)|$．由［5］知有

$$\rho(\omega)=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\lambda_n\ln\lambda_n}{\ln|a_n|^{-1}}=\rho\qquad a.s. \tag{5}$$

我们有下面关于级与系数及指数之间的关系．

* 1981年6月19日收到，推荐者：余家荣（武汉大学）．

定理1 设（1）、（3）、（4）成立，则有

1) $P[\overline{\lim_{n\to\infty}}(|a_n|\geqslant\lambda_n^{-\frac{\lambda_n}{x+\varepsilon}})]=0,\ \forall\varepsilon>0\Leftrightarrow\rho(\omega)\leqslant x\quad a.s.;$

2) $P[\overline{\lim_{n\to\infty}}(|a_n|\geqslant\lambda_n^{-\frac{\lambda_n}{x-\varepsilon}})]=1,\ \forall\varepsilon\in(0,x)\Leftrightarrow\rho(\omega)\geqslant x\ a.s.;$

3) $P[\overline{\lim_{n\to\infty}}(|a_n|\geqslant\lambda_n^{-\frac{\lambda_n}{\varepsilon}})]=0,\ \forall\varepsilon>0\Leftrightarrow\rho(\omega)=0\ a.s.;$

4) $P[\overline{\lim_{n\to\infty}}(|a_n|\geqslant\lambda_n^{-\lambda_n\varepsilon})]=1,\ \forall\varepsilon>0\Leftrightarrow\rho(\omega)=+\infty\ a.s.$。

若设随机变量 $|a_n(\omega)|$ 有共同的分布函数 $F(x)$，则有

定理2 设（1）、（3）、（4）成立，则有

1) $\rho(\omega)\leqslant\rho_0\ a.s.\Leftrightarrow\int_0^\infty(1-F(x^{-\frac{x}{c}}))dx<\infty\quad\forall c>\rho_0;$

2) $\rho(\omega)\geqslant\rho_0\ a.s.\Leftrightarrow\int_0^\infty(1-F(x^{-\frac{x}{c}}))dx=\infty\quad\forall c<\rho_0(c>0);$

3) $\rho(\omega)=0\ a.s.\Leftrightarrow\int_0^\infty(1-F(x^{-\frac{x}{c}}))dx<\infty\quad\forall c>0;$

4) $\rho(\omega)=+\infty\ a.s.\Leftrightarrow\int_0^\infty(1-F(x^{-\frac{x}{c}}))dx=\infty\quad\forall c>0$。

证明从略。

另外当（1）、（3）、（4）成立时，由 P. K. Kamthan [6] 的结果知道若 $\theta(n,\omega)=\ln|a_{n-1}(\omega)/a_n(\omega))|/(\lambda_n-\lambda_{n-1})$ 几乎必然为非减序列，则（2）的Ritt 下级由下式给出

$$\lambda(\omega)=\lim_{\sigma\to-\infty}\frac{\ln\ln M(\sigma,\omega)}{-\sigma}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n\ln\lambda_n}{\ln|a_n(\omega)|^{-1}}=\lambda\ （常数）\ a.s.$$

这样我们就有

定理3 在上述条件下，有

1) $\lambda(\omega)\leqslant\lambda_0\ a.s.\Leftrightarrow\int_0^\infty F(x^{-\frac{x}{c}})dx=\infty,\ \forall c>\lambda_0;$

2) $\lambda(\omega)\geqslant\lambda_0\ a.s.\Leftrightarrow\int_0^\infty F(x^{-\frac{x}{c}})dx<\infty,\ \forall c\in(0,\lambda_0)$。

证明从略。

下面我们对随机变量 $e^{r|a_n(\omega)|}$ 取数学期望，作狄里克莱级数 $\varphi(s)=\sum_{n=0}^\infty E(e^{r|a_n(\omega)|})e^{-\lambda_n s}$。函数 $\varphi(s)$ 与（2）所代表的随机整函数 $f(s,\omega)$ 的上、下级之间有如下关系。

定理4 条件同定理2、3，且有

$$E(e^{r|a_n(\omega)|})<\infty,\ \forall n\in N;\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln|E(e^{r|a_n(\omega)|})|}{\lambda_n}=-\infty$$

记

$$\begin{matrix}\rho_r\\\lambda_r\end{matrix}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\lambda_n\ln\lambda_n}{\ln(Ee^{r|a_n|})^{-1}}$$

则有

$$\rho(\omega)\leqslant\rho_r,\ \lambda(\omega)\leqslant\lambda_r\qquad a.s.$$

证　对任意随机变量X，有

$$E(e^{rX})\geqslant\int_{[X<a]}e^{rX}P(d\omega)\geqslant e^{ra}P[X\geqslant a],$$

因此
$$P[X\geqslant a]\leqslant e^{-ra}E(e^{rX})\qquad\forall a. \tag{6}$$

由ρ_r的定义知　　$\forall\varepsilon>0$；$\exists n_0$，当$n>n_0$时，有

$$\rho_r+\varepsilon>\frac{\lambda_n\ln\lambda_n}{\ln(E^{r|a_n|})^{-1}},\quad 即\ E(e^{r|a_n|})<\lambda_n^{-\frac{\lambda_n}{\rho_r+\varepsilon}}.$$

由（6）得

$$\sum_0^\infty P\left(|a_n|\geqslant\lambda_n^{-\frac{\lambda_n}{\rho_r+\varepsilon}}\right)<\sum_0^\infty e^{-r\lambda_n^{-\frac{\lambda_n}{\rho_r+\varepsilon}}}\cdot\lambda_n^{-\frac{\lambda_n}{\rho_r+\varepsilon}}<\sum_0^\infty\lambda_n^{-\frac{\lambda_n}{\rho_r+\varepsilon}}+c,$$

c为常数。若取$0<m'<m$，由（3）知存在着N_0，使得

$$\lambda_n\geqslant nm'+A,\ \forall n>N_0,\ A\text{ 为常数},$$

故有
$$\lambda_n^{-\frac{\lambda_n}{\rho_r+\varepsilon}}\leqslant(nm'+A)^{-\frac{nm'+A}{\rho_r+\varepsilon}}.$$

而当$n>N$时，有

$$(nm'+A)^{-\frac{nm'+A}{\rho_r+\varepsilon}}\leqslant n^{-2},$$

因此有
$$\sum_0^\infty P\left(|a_n|\geqslant\lambda_n^{-\frac{\lambda_n}{\rho_r+\varepsilon}}\right)<\infty\qquad\forall\varepsilon>0.$$

由定理 1 知
$$\rho(\omega)\leqslant\rho_r\qquad a.s.$$

由λ_r的定义知$\forall\varepsilon>0$，$\exists\{n_k\}$，$n_k\uparrow\infty$使得

$$\lambda_r+\varepsilon\geqslant\frac{\lambda_{n_k}\ln\lambda_{n_k}}{\ln(Ee^{r|a_{n_k}|})^{-1}},\quad 即\ E(e^{r|a_{n_k}|})\leqslant\lambda_{n_k}^{\frac{-\lambda_{n_k}}{l}}.$$

在级数
$$\sum_0^\infty P\left(|a_n|<\lambda_n^{-\frac{\lambda_n}{\lambda_r+\varepsilon}}\right)\ 中有无穷多项\ (k=1,2,\cdots),$$

有
$$P\left(|a_{n_k}|<\lambda_{n_k}^{-\frac{\lambda_{n_k}}{\lambda_r+\varepsilon}}\right)\geqslant1-e^{-r\lambda_{n_k}^{-\frac{\lambda_{n_k}}{\lambda_r+\varepsilon}}}\cdot\lambda_{n_k}^{-\frac{\lambda_{n_k}}{\lambda_r+\varepsilon}}>\frac{1}{2}\quad(k>k_0),$$

所以　$\sum_0^\infty P\left(|a_n|<\lambda_n^{-\frac{\lambda_n}{\lambda_r+\varepsilon}}\right)=\infty$，$\forall\varepsilon>0$。由定理 3 得知$\lambda(\omega)\leqslant\lambda_r$ $a.s.$ ∎

二

下面我们将定义狄里克莱级数所确定的函数的准确级和准确型。设递增正数序列$\{\lambda_n\}$满足

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln n}{\lambda_n}=0, \tag{*}$$

在此条件下，我们采用与［7］不同的方法，得到了同样的结果。然后再考虑随机的情形。

设有狄里克莱级数

$$f(s)=\sum_{0}^{\infty}b_ne^{-\lambda_n s},\tag{7}$$

其中 $\{b_n\}$ 为复常数序列，且满足

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln|b_n|}{\lambda_n}=-\infty.\tag{8}$$

按照 F. S. Balaguer [3.4] 给出的形式定义准确级，即连续函数 $\rho(\cdot):\rho(x)$ 在每点有左右导数，且

$$\lim_{\sigma\to-\infty}\rho(-\sigma)=\rho,\quad \lim_{\sigma\to-\infty}\sigma\rho'(-\sigma)=0,\tag{9}$$

若由（5）定义的级数（6）的 Ritt 级 ρ 为有穷数，则定义 $f(s)$ 的准确型 $\tau=\overline{\lim_{\sigma\to-\infty}}\frac{\ln M(\sigma)}{e^{-\sigma\rho(-\sigma)}}$。

我们将要证明上式成立的充要条件为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\varphi(\lambda_n)|b_n|^{\frac{1}{\lambda_n}}=(e\rho\tau)^{\frac{1}{\rho}}$$

其中 $-\ln\varphi(t)=\sigma$ 与 $t=e^{-\sigma\rho(-\sigma)}$ 互为反函数（$\sigma<\sigma_0$）。为此先给出两个引理，证明从略。

引理 1　设 a、b 为正常数，则有

$$\Phi(\sigma)=ae^{-\sigma\rho(-\sigma)}+b\sigma\quad(\sigma<0),$$

当 $\sigma=-\ln\varphi\left(\frac{b}{a\rho(1+o(1))}\right)$ 时，达到其最小值 $\frac{b}{\rho}\ln(a\rho)-\ln\varphi(b)+\frac{b}{\rho}(1+o(1))$。

引理 2　设 a 为正常数，那么 $\psi(x)=ax-x\ln\varphi(x)$ 当

$$x=e^{-(a-\frac{1}{\rho}(1+o(1)))\rho(-a+\frac{1}{\rho}(1+o(1)))}$$

时，达到其最大值 $\frac{1}{\rho}e^{-(a-\frac{1}{\rho}(1+o(1)))\rho(-a+\frac{1}{\rho}(1+o(1)))}(1+o(1))$（$a\to\infty$）。

现利用这两个引理来证明下列定理，这里的证法与[7]中的不同。

定理5　设级数（7）满足（8）、（*），且（5）所定义的 ρ 是有穷正数。$\rho(\sigma)(\sigma<0)$ 为满足（9）的一阶连续函数，那么

$$\overline{\lim_{\sigma\to\infty}}\frac{\ln M(\sigma)}{e^{-\sigma\rho(-\sigma)}}=\tau\Longleftrightarrow\overline{\lim_{n\to\infty}}\varphi(\lambda_n)|b_n|^{\frac{1}{\lambda_n}}=(e\rho\tau)^{\frac{1}{\rho}}\tag{10}$$

证　先证明右边条件的必要性。

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\sigma_0<0$，使得对任何整数 $n\geqslant0$ 及 $\sigma<\sigma_0$，有

$$\ln|b_n|\leqslant(\tau+\varepsilon)e^{-\sigma\rho(-\sigma)}+\lambda_n\sigma.$$

由引理 1 知

$$\ln|b_n|\leqslant\left[\frac{\lambda_n}{\rho}(1+o(1))+\frac{\lambda_n}{\rho}\ln a\rho-\lambda_n\ln\varphi(\lambda_n)\right]$$

所以　$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\varphi(\lambda_n)|b_n|^{\frac{1}{\lambda_n}}\leqslant(e\rho\tau)^{\frac{1}{\rho}}$$

另外假定　　$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\varphi(\lambda_n)\,|b_n|^{\frac{1}{\lambda_n}}<(e\rho\tau')^{\frac{1}{\rho}},\qquad \tau'<\tau$。

故存在正数 c，使得

$$|b_0|<c,\quad |b_n|<c(e\rho\tau')^{\frac{\lambda_n}{\rho}}\varphi^{-\lambda_n}(\lambda_n),\qquad \forall n.$$

故有

$$M(\sigma)<c\sum_{n=0}^{\infty}\exp\{\lambda_n\ln(e\rho\tau')^{\frac{1}{\rho}}-\lambda_n\ln\varphi(\lambda_n)\}e^{-\lambda_n\sigma}$$

$$=c\sum_{n=0}^{\infty}\exp\{\lambda_n\ln(e\rho\tau')^{\frac{1}{\rho}}-\lambda_n\ln\varphi(\lambda_n)-(1+\varepsilon)\lambda_n\sigma\}\cdot e^{\varepsilon\lambda_n\sigma}$$

$$\leqslant c\sup_n\exp\{\lambda_n\ln(e\rho\tau')^{\frac{1}{\rho}}-\lambda_n\ln\varphi(\lambda_n)-(1+\varepsilon)\lambda_n\sigma\}\Sigma e^{\varepsilon\lambda_n\sigma}$$

由引理 2 及（*）得到 $M(\sigma)<c\exp\{\tau' e^{-(1+\varepsilon)\rho(-(1+\varepsilon)\sigma)}\}$，所以 $\overline{\lim\limits_{\sigma\to-\infty}}\dfrac{\ln M(\sigma)}{e^{-\sigma\rho(-\sigma)}}\leqslant\tau'$。从而与 $\overline{\lim\limits_{\sigma\to-\infty}}\dfrac{\ln M(\sigma)}{e^{-\sigma\rho(-\sigma)}}=\tau$ 矛盾。

由以上证明也不难看出（10）右边条件的充分性。对 $\tau=0$ 及 $\tau=+\infty$ 的两种情形，可类似地证明。

设随机狄里克莱级数（2）满足（4）、(*)，而 $a_n(\omega)$ 为独立随机变量。设 $\rho(\omega)=\rho$ $a.s.$，而 $0<\rho<+\infty$。由定理 5 及 0—1 律得到

$$\overline{\lim_{\sigma\to-\infty}}\frac{\ln^+M(\sigma,\omega)}{e^{-\sigma\rho(-\sigma)}}=\tau(\omega)\Longleftrightarrow\overline{\lim_{n\to\infty}}\varphi(\lambda_n)\,|a_n(\omega)|^{\frac{1}{\lambda_n}}=(e\rho\tau)^{\frac{1}{\rho}},$$

其中 $\tau(\omega)=\tau\quad a.s.$.

定理 6　级数（2）满足（3）、(4)，$a_n(\omega)$ 为独立随机变量，且有相同的分布函数 $F(x)$，$F(+0)<1$，以及 $\rho(\omega)=\rho\ a.s.\ 0<\rho<+\infty$，那么

(i) 当 $0<\tau<+\infty$ 时，

$$\tau(\omega)=\tau\ a.s.\Longleftrightarrow\int(1-F(e\rho a)^{\frac{\lambda_n}{\rho}}\varphi^{-\lambda_n}(\lambda_n)))\begin{cases}<\infty & \forall a>\tau\\ =\infty & \forall a<\tau\end{cases},$$

(ii) $\tau(\omega)=0\ a.s.\Longleftrightarrow\int(1-F(\varepsilon^{\frac{\lambda_n}{\rho}}\varphi^{-\lambda_n}(\lambda_n)))<\infty\quad\forall\varepsilon>0$

(iii) $\tau(\omega)=\infty\ a.s.\Longleftrightarrow\int(1-F(\varepsilon^{-\frac{\lambda_n}{\rho}}\varphi^{-\lambda_n}(\lambda_n)))=\infty\quad\forall\varepsilon>0$.

证明从略。

参　考　文　献

[1] 余家荣，随机狄里克莱级数的一些性质，数学学报，21卷，1978.

[2] 余家荣，Sur les droites de Borel de certaines fonctions entieres, Annales Scientifigues de L'Ecole N. S. 1955.

[3] Balaguer, F. S., Sobre la distribution de los valores de una function entera representade por una serie de Dirichlet lagunar, Rev. Aca. Ci. Zaragoza, 5, 1970.

[4] ——, Values of entire functions represented by gap Dirichlet series, *Proc. Amer. Math. Soc.* 4, 1953.

[5] Mandbrojt, S., Ряды Дирихле, Mосва, 1973.

[6] Kamthan, P. K., On entire functions represented by Dirichlet series (Ⅳ), *Ann. Inst. Fourier*, 16 (1966).

[7] Jain, P. K. and Gupta, P. N., Proximate order (R) of an entire Dirichlet series, *Bull. Laca. Polo. Sc.* 18, 1970.

[8] Arnold, L., Wachstumseigenschafter zufälliger ganzer Funktionen, *Zeit. fur. Wahr. Verw. Geb.* 5-6(1966).

On the Growth of Random Entire Functions Represented by Random Dirichlet Series

Mao Chao-Lin

Abstract

Let $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ be a probability spasce. Consider a random Dirichlet series

$$f(s,\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\omega)e^{-\lambda_n s},$$

whose abscissa of convergence is $\sigma(\omega)$, where $a_n(\omega)$ are random variables in $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ and λ_n satisfy the condition

$$0=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n\uparrow+\infty.$$

In the case $\sigma(\omega)=-\infty$ a. s., we study the a. s. growth of the random entire function $f(s,\omega)$ and obtain some relations between the Ritt order of $f(s,\omega)$ and the random coefficents.

As a special case we find that if $|a_n(\omega)|$ are independent and have the same non-degenerate distribution and $F(x)$ and $\{\lambda_n\}$. $\{a_n(\omega)\}$ satisfy some other conditions, then the Ritt order $\rho(\omega)$ and the lower Ritt order $\lambda(\omega)$ of the random entire function $f(s,\omega)$ are determined by

$$\rho(\omega)=\rho_0\ \ a.s.\ (0<\rho_0<+\infty)\Longleftrightarrow\begin{cases}\int_0^\infty(1-F(x^{-\frac{x}{c}}))dx<\infty & \forall c>\rho_0,\\ \int_0^\infty(1-F(x^{-\frac{x}{c}}))dx=\infty & \forall c<\rho_0\,(c>0);\end{cases}$$

$$\lambda(\omega)=\lambda_0\ \ a.s.\ (0<\lambda_0<+\infty)\Longleftrightarrow\begin{cases}\int_0^\infty F(x^{-\frac{x}{c}})dx=\infty & \forall c>\lambda_0,\\ \int_0^\infty F(x^{-\frac{x}{c}})dx<\infty & \forall c<\lambda_0\,(c>0).\end{cases}$$

For infinite and zero Ritt order we havc some corresponding results. In addition we discuss the proximate order and type of random entire functions.