第4卷 第2期
1984年4月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.2
April 1984

次线性泛函与分离定理*

韩景銮

（中山大学）

局部凸拓扑线性空间（E,T）上的全体连续线性泛函 E' 能区分点以及区分闭凸集与紧凸集．现考虑（E,T）上 θ 点的全体凸邻域组成的一个局部基 $\mathscr{U}$，对 $V\in\mathscr{U}$，V 的 Minkowski 泛函记作 P_V，P_V 是半可加、正齐次连续泛函．本文证明泛函族 $S=\{P_V|V\in\mathscr{U}\}$ 能区分点、区分有界闭凸集与紧凸集．并由此得到 H. Bauer 极大值原理及 Krein-Milman 定理的一个简短的初等证明．它既不依赖 Hahn-Banach 定理也不依赖线性泛函的概念（见[1]§4）．

引理 1 设（E,T）是 T_2 局部凸拓扑线性空间（简记为 lcs）．$A\subset E$，$B\subset E$，A 为有界闭凸集，B 为紧凸集，则 $Co(A\cup B)$ 是闭集．

引理 2 设（E,T）是 lcs，A 和 B 是 E 中不相交的凸集，其中 A 是有界闭集，B 是紧集．

a）若 $B\cap Co(A\cup\{\theta\})=\varnothing$，则存在 θ 点的凸邻域 V，使 $A\subset\mathrm{int}V$ 且 $B\cap V=\varnothing$．

b）若 $B\cap Co(A\cup\{\theta\})\neq\varnothing$，则存在 θ 点的凸邻域 V，使 $B\subset\mathrm{int}V$ 且 $A\cap V=\varnothing$．

定理 1 设（E,T）是 lcs，A 和 B 是 E 中不相交的凸集，其中 A 是有界闭集，B 是紧集．则存在 $P_V\in S$ 使 $P_V(B)>P_V(A)$ 或 $P_V(B)<P_V(A)$ 成立．

证明 取引理 2 中的 V，作 V 的 Minkowski 泛函 P_V，则 P_V 为所求．

应用定理 1，我们给出 H. Bauer 定理及 Krein-Milman 定理的初等证明，同时给出泛函族 S 的一些有用的性质．

定理 2 （H. Bauer）设（E,T）是 lcs，B 是 E 中非空紧集，f 是定义在 B 上的上半连续凸泛函，则 f 在 B 的一个端点达到极大值．

证明 令 $A_B=\{x|x\in B,\ f(x)=\max f(B)\}$，则 A_B 是 B 的闭端集（即 A_B 是非空闭集，且当 x，$y\in B$，$\lambda x+(1-\lambda)y\in A_B$，$0<\lambda<1$ 时便有 $x,y\in A_B$）．设 Δ 是由 A_B 的所有闭端集组成的集族．Δ 是非空的．今在 Δ 上定义序关系"$\leqslant$"如下：$A_1,A_2\in\Delta$；$A_1\leqslant A_2\Longleftrightarrow A_1\supset A_2$．由 Zorn 引理及 A_B 紧性知 Δ 有极大元 A_0，A_0 仅含有一个元素．若 A_0 含有两个不同元素 a，b．则由定理 1 可知有连续凸泛函 $g\in S$ 使 $g(a)\neq g(b)$．令 $A=\{x|x\in A_0,\ g(x)=\max g(A_0)\}$．则 $A\subset A_0$，$A\neq A_0$，且 A 是 A_B 的一个闭端集．这与 A_0 是极大元矛盾．故此 A_0 仅含一个元素 a_0，从而 a_0 是 B 的端点且 $f(a_0)=\max f(B)$．

*1982 年9月6日收到．

系 1 设 (E,T) 是 lcs，B 是 E 内一个非空紧集，则 $\partial B\neq\varnothing$（$\partial B$ 记 B 的全体端点）。

证明 令 $f\equiv0$，则 f 是定义在 B 上的凸泛函。再由定理 2 便知 $\partial B\neq\varnothing$。

系 2 （Krein-Milman）设 (E,T) 是 lcs，B 是 E 内非空紧凸集，则 $B=\overline{Co}(\partial B)$。

证明 显然 $\overline{Co}(\partial B)\subset B$。若 $B\neq\overline{Co}(\partial B)$，则存在 $x_0\in B$ 而 $x_0\bar{\in}\overline{Co}(\partial B)$。由定理 1 存在 $p\in S$，使

$$p(x_0)>p(y),\ \forall y\in\overline{Co}(\partial B). \tag{1}$$

或

$$p(x_0)<p(y),\ \forall y\in\overline{Co}(\partial B). \tag{2}$$

若(1)成立，则由定理 2，存在 B 的端点 y_0，使 $p(y_0)=\max p(B)\geqslant p(x_0)$。这与 (1) 矛盾。

若 (2) 成立，定义 $q(x)=\inf\{p(y-x)\mid y\in\overline{Co}(\partial B)\}$。则 $q(x)$ 是 B 上的连续凸泛函且 $q(y)=0$，$\forall y\in\overline{Co}(\partial B)$ 及 $q(x_0)>0$。但由定理 2 存在 $y_0\in\partial B$，使 $q(y_0)=\max q(B)>0$。这与 $y_0\in\overline{Co}(\partial B)$ 矛盾。

所以，$B=\overline{Co}(\partial B)$。

系 3 设 (E,T) 是 lcs，B 是 E 内非空绝对凸集，且 B 是紧的。又设 $A\subset B$，A 是闭集。则 $A\supset\overline{\partial B}\Longleftrightarrow\forall p\in S$ 均有 $\max p(A)=\max p(B)$。

若 M 是 E 的线性子空间，由定理 1 可以证明 M 在 E 中稠 $\Longleftrightarrow\forall p\in S$，若 $p(M)=0$ 则 $p(E)=0$。此外，若考虑 E 上全体半可加泛函，我们还可以得到 Alaoglu-Bourbaki 定理的一个推广。

参考文献

[1] Rieffel, M. A., The Radon-Nikodym theorem for the Bochner integral, *Trans. Amer. Math. Soc.* 131 (1968), 466—487.

[2] Dunford, N. and Schwartz, J., Linear operators, Part I (Interscience, New York) (1958).

[3] Krein, M. and Milman, D., On extreme points of regular convex sets, *Studia Math.* 9 (1940) 133—138.

Sublinear Functional and Separation Theorem

Han Jingluan

(Sun Yatsen University)

Abstract

In this note, we consider a family of functionals $S=\{p_V\mid V\in\mathscr{U}\}$, where $\mathscr{U}$ is a local base of a locally convex topological linear space (E,T) consisting of all convex neighbourhoods of θ, p_V is the Minkowski's functional of V. It is proved that the family S can distinguishes compact convex set and bounded closed convex set. In the sequel, an elementary proof of H. Bauer's maximality principle and Krein-Milman theorem are given. Some other interesting properties of S are given also.