第4卷 第2期
1984年4月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.2
April 1984

关于分离性和同胚关系的一些推广*

胡庆平

（西北大学数学系）

1963年Norman Levine引入了半开集和半连续函数的概念[2]。1972年S. Gene Crossley等又引入不定函数和前半开函数，定义了半同胚，讨论了一系列的半拓扑性质[3]。以后出现了不少有关半开集和半同胚方面的论文。作者拟在这里进一步引入两类分离性和几种新的同胚，并且指出在一定意义下有些名称应当改变。

首先，我们在这里利用半开集，产生一种分离手段——半开集分离性，从而定义一系列新的拓扑空间，它们之间及它们与T_i-型拓扑空间（$i=0,1,2,3,4$）之间有着一定的联系。拓扑空间（$X,\mathscr{T}$）里的一个集合A被称为半开的，当且仅当$\exists\, T\in\mathscr{T}$，使得$T\subseteq A\subseteq T^-$，其中$T^-$是$T$的闭包。（$X,\mathscr{T}$）中一切半开集的族记为S.O.(X)。易知下列事实[3]：$\mathscr{T}\subseteq$S.O.(X)；如果$A\in$S.O.(X)，且$A\subseteq B\subseteq A^-$，则$B\in$S.O.(X)；如果$A\subseteq Y\subseteq X$，$A\in$S.O.(X)，$Y$是$X$的子空间，则$A\in$S.O.(Y)。

定义1 设（$X,\mathscr{T}$）是一个拓扑空间。

1. 如果$\forall x,y\in X$，$\exists S\in$S.O.(X)，使$x\in S$，$y\bar{\in} S$，或$x\bar{\in} S$，$y\in S$，则称（$X,\mathscr{T}$）满足$(S.O.)_0$分离性公理，并称（$X,\mathscr{T}$）为$(S.O.)_0^-$型拓扑空间。

2. 如果$\forall x,y\in X$，$\exists S_1,S_2\in$S.O.(X)，使$x\in S_1$，$y\in S_2$，且$x\bar{\in} S_2$，$y\bar{\in} S_1$，则称（$X,\mathscr{T}$）满足$(S.O.)_1$分离性公理，并称（$X,\mathscr{T}$）为$(S.O.)_1^-$型拓扑空间。

3. 如果$\forall x,y\in X$，$\exists S_1,S_2\in$S.O.(X)，使$x\in S_1$，$y\in S_2$，且$S_1\cap S_2=\varnothing$，则称（$X,\mathscr{T}$）满足$(S.O.)_2$分离性公理，并称（$X,\mathscr{T}$）为$(S.O.)_2^-$型拓扑空间。

4. 如果$\forall x\in X$，$\forall$闭集F，$x\bar{\in} F$，$\exists S_1,S_2\in$S.O.(X)，使$x\in S_1$，$F\subseteq S_2$，$S_1\cap S_2=\varnothing$，则称（$X,\mathscr{T}$）满足$(S.O.)_3$分离性公理。满足$(S.O.)_3$分离性公理的T_1空间称为$(S.O.)_3$空间。（满足$(S.O.)_3$分离性公理的拓扑空间称为$(S.O.)_3^*$空间。）

5. 如果$\forall$闭集F_1,F_2，$F_1\cap F_2=\varnothing$，$\exists S_1,S_2\in$S.O.(X)，使$F_1\subseteq S_1$，$F_2\subseteq S_2$，$S_1\cap S_2=\varnothing$，则称（$X,\mathscr{T}$）满足$(S.O.)_4$分离性公理。这样的拓扑空间称为$(S.O.)_4^*$-空间。T_1的$(S.O.)_4^*$空间称为$(S.O.)_4$空间。

我们易知成立下列：

定理1 下列关系表成立：

*1981年7月1日收到。

$$
\begin{tikzcd}
T_0 \arrow[d] & T_1 \arrow[l] \arrow[d] & T_2 \arrow[l] \arrow[d] & T_3 \arrow[l] \arrow[d] & T_4 \arrow[l] \arrow[d] \\
(S.O.)_0 & (S.O.)_1 \arrow[l] & (S.O.)_2 \arrow[l] & (S.O.)_3 \arrow[l] & (S.O.)_4, \arrow[l]
\end{tikzcd}
\qquad (1)
$$

其中 T_i 及 $(S.O.)_i$ 分别表示相应的拓扑空间. ∎

现在我们再来研究几种函数.

定义2　设 f 是拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 上到拓扑空间 $(Y,\mathscr{S})$ 的一个函数.

1. $\forall A\in S.O.(X)\Rightarrow f[A]\in\mathscr{S}$. 称 f 为半开-开函数, 或称为强半开的.

2. $\forall T\in\mathscr{T}\Rightarrow f[T]\in S.O.(Y)$, 称 f 为开-半开函数, 简称为弱半开的.

3. $\forall T\in\mathscr{T}\Rightarrow f[T]\in\mathscr{S}$, 称 f 为开-开函数, 简称为开函数.

4. $\forall A\in S.O.(X)\Rightarrow f[A]\in S.O.(Y)$, 称 f 为半开-半开函数, 或简称为半开函数. 在[3]中把这种半开函数称为前半开函数 (pre-semi-open function). 我们建议, 称之为半开的.

5. 若 f 既是开的, 又是半开的, 称为次强半开的.

定理2　上面五种函数间的关系由下表给出:

$$
\begin{tikzcd}
 & & \text{开函数} \arrow[dr] & \\
\text{强半开函数} \arrow[r] & \text{次强半开函数} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{弱半开函数} \\
 & & \text{半开函数} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad (2)
$$
∎

设 f 是拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 上到拓扑空间 $(Y,\mathscr{S})$ 的函数, g 是从 $(Y,\mathscr{S})$ 上到拓扑空间 $(Z,\mathscr{R})$ 的函数, 易知有下面一系列的结果:

定理3　若 f 是强半开函数. 1) 若 g 是强半开的或开的, 则 $g\circ f$ 是强半开的. 2) 若 g 是半开的或弱半开的, 则 $g\circ f$ 是半开的. ∎

定理4　若 f 是次强半开函数. 1) 若 g 是强半开函数, 则 $g\circ f$ 是强半开函数. 2) 若 g 是次强半开函数, 则 $g\circ f$ 是次强半开函数. 3) 若 g 是开函数, 则 $g\circ f$ 是开函数. 4) 若 g 是半开函数, 则 $g\circ f$ 是半开函数. 5) 若 g 是弱半开函数, 则 $g\circ f$ 是弱半开函数. ∎

定理5　若 f 是开函数. 1) 若 g 是强半开函数或次强半开函数或半开函数, 则 $g\circ f$ 是半开函数. 2) 若 g 是半开函数或弱半开函数, 则 $g\circ f$ 是弱半开函数. ∎

定理6　若 f 是半开函数. 1) 若 g 是强半开函数, 则 $g\circ f$ 是强半开函数. 2) 若 g 是次强半开的或半开的, 则 $g\circ f$ 是半开的. ∎

定理7　若 f 是弱半开函数. 1) 若 g 是强半开函数, 则 $g\circ f$ 是开函数. 2) 若 g 是次强半开函数或半开函数, 则 $g\circ f$ 是弱半开函数. ∎

下面我们给出另外五种函数的定义.

定义3　设 f 是拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 上到拓扑空间 $(Y,\mathscr{S})$ 上的一个函数.

1. $\forall B\in S.O.(Y)\Rightarrow f^{-1}[B]\in\mathscr{T}$, 称 f 为强连续的.

2. $\forall S\in\mathscr{S}\Rightarrow f^{-1}[S]\in\mathscr{T}$, 称 f 为连续的. (这是在拓扑学中熟知的定义, 为便于比较, 这里仍予以列出.)

3. $\forall B\in S.O.(Y)\Rightarrow f^{-1}[B]\in S.O.(X)$，称 f 为半连续的。（文 [3] 中把这一类函数称为不定的（irresolute），为了定义 3 和表（2）及后面的概念一致起来，我们建议，称之为半连续函数。）

4. $\forall S\in\mathscr{S}\Rightarrow f^{-1}[S]\in S.O.(X)$，称 f 为弱连续的。（文 [2] 中把这一类函数称为半连续的。同于上面原因，我们建议，称之为弱连续函数。）

5. 若 f 既是连续的，又是半连续的，称之为次强连续的。

定理8　定义 3 中的五种函数之间的关系由下表给出：

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & \text{连续函数} \arrow[dr] & \\ \text{强连续函数} \arrow[r] & \text{次强连续函数} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{弱连续函数} \\ & & \text{半连续函数} \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad (3) \quad \blacksquare$$

设 f 是拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 上到拓扑空间上 $(Y,\mathscr{S})$ 的函数，g是 $(Y,\mathscr{S})$ 上到拓扑空间 $(Z,\mathscr{R})$ 上的函数。我们有下面一系列的结果：

定理9　设 f 是强连续函数。1）若 g 是强连续的或次强连续的或半连续的，则 $g\circ f$ 是强连续的。2）若 g 是连续的或弱连续的，则 $g\circ f$ 是连续的。 ∎

定理10　若 f 是次强连续函数。1）若 g 是强连续的，则 $g\circ f$ 也是强连续的。2）若 g 是次强连续的，则 $g\circ f$ 也是次强连续的。3）若 g 是连续的，则 $g\circ f$ 是连续的。4）若 g 是半连续的，则 $g\circ f$ 是半连续的。5）若 g 是弱连续的，则 $g\circ f$ 也是弱连续的。 ∎

定理11　若 f 是连续函数.1）若 g 是强连续的，则 $g\circ f$ 也是强连续函数。2）若 g 是次强连续的，则 $g\circ f$ 也是连续函数。 ∎

定理12　若 f 是半连续函数。1）若 g 是强连续的或次强连续的或半连续的，则 $g\circ f$ 是半连续函数。2）若 g 是连续的或弱连续的，则 $g\circ f$ 是弱连续函数。 ∎

定理13　若 f 是弱连续函数。1）若 g 是强连续的，则 $g\circ f$ 是半连续的。2）若 g 是次强连续的或连续的，则 $g\circ f$ 是弱连续的。 ∎

类似于半开集分离性是开集分离性的推广，点集拓扑中的连续函数分离性也可以作多种推广。下面我们先给出半连续函数分离性：

定义4　设 $(X,\mathscr{T})$ 是一个拓扑空间。

1. 如果对 $\forall x,y\in X$，$\exists(X,\mathscr{T})$ 上到 Q 的一个半连续函数 f，使得 $f(x)=0$，$f(y)=1$，则称 $(X,\mathscr{T})$ 是一个半连续函数分离点和点的拓扑空间，简称为一个 f—S(P.—P.) 型函数分离空间。

2. 记闭集为C.，则类似地可定义 f—S(P.—C.) 型函数分离空间和 f—S(C.—C.) 型函数分离空间。

3. 把 T_1 的f—S(P.—P.) 型函数分离空间称为 f—S$(P.—P.)_1$ 型函数分离空间。类似地，可有 f—S$(P.—P.)_2$ 型函数分离空间及 f—S$(P.—C.)_1$ 型函数分离空间等。

对于半连续函数分离性我们有以下结果：

定理14　f—S$(C.—C.)_1\to f$—S$(P.—C.)_1\to f$—S$(P.—P.)_1$，f—S(P.—P.)$\to(S.O.)_2$，f—S(P.—C.)$\to(S.O.)_3^*$，f—S$(P.—C.)_1\to(S.O.)_3$，f—S(C.—C.)$\to(S.O.)_4^*$，f—S(C.—

C.)$_1\to$(S.O.)$_4$，其中的记号皆表示此类空间。 ∎

类似于定义 4，我们可定义次强连续函数分离点和点的拓扑空间（f—STER(P.—P.)型)、强连续函数分离点和点的拓扑空间（f—ST(P.—P.) 型空间）及弱连续函数分离点和点的拓扑空间（f—W(P.—P.) 型空间）等。我们有下列结果：

定理15 1) f—ST (C.—C.)$_1\to f$—ST (P.—C.)$_1\to f$—ST (P.—P.)$_1$。2) f—ST (P.—P.)$\to f$—STER(P.—P.)$\to$连续函数分离空间（完全的 Hausdorff 空间)$\to T_2$空间。3) f—ST(P.—P.)$\Longleftrightarrow$f—ST(P.—P.)$_1$。4) f—ST(P.—C.)$\to$f—STER(P.—C.)$\to$全正则空间，从而 f—ST(P.—C.)$_1\to$Tychonoff 空间。5) f—ST(C.—C.)$\to$f—STER(C.—C.)$\to$正规空间，从而 f—ST(C.—C.)$_1\to T_4$空间。6) f—ST(P.—P.)$\to$f—S(P.—P.)，从而一定是(S.O.)$_2$型空间。7) f—ST(P.—C.)$\to$f—S(P.—C.)，从而是 (S.O.)$^*_3$型空间，而 f—ST(P.—C.)$_1$ 型空间则是 (S.O.)$_3$ 型空间。8) f—ST(C.—C.)$\to$f—S(C.—C.)，从而是 (S.O.)$^*_4$型空间，而f—ST(C.—C.)$_1$ 型空间则是 (S.O.)$_4$ 型空间。9) f—W(C.—C.)$_1\to$f—W(P.—C.)$_1\to$f—W(P.—P.)$_1$。10) 函数分离空间 (Hausdorff 完全空间)$\to$f—W(P.—P.)$_1$，f—S(P.—P.)$\to$f—W(P.—P.)。11) f—W(P.—P.)$\to$(S.O.)$_2$型空间。12) 全正则空间$\to$f—W(P—C.)，f—S(P.—C.)$\to$f—W(P.—C.)，13) 正规空间$\to$f—W(C.—C.)，T_4-空间$\to$f—W(C.—C.)$_1$，f—S(C.—C.)$\to$f—W(C.—C.)。上述各记号皆表示此类空间。 ∎

我们可以进一步讨论包括同胚、半同胚在内的五种同胚。我们先给出下列定义：

定义5 设 f 是从拓扑空间$(X,\mathscr{T})$上到拓扑空间 $(Y,\mathscr{S})$ 上的一一函数。

1．如果 f 既是强连续函数，又是一个强半开函数，则称 f 是一个强同胚映射，此时称 $(X,\mathscr{T})$ 与 $(Y,\mathscr{S})$ 强同胚，记为$(X,\mathscr{T})\overset{(ST)}{\simeq}(Y,\mathscr{S})$

2．如果 f 既是次强连续函数，又是一个次强半开函数，则称 f 是一个次强同胚映射，此时称 $(X,\mathscr{T})$ 与 $(Y,\mathscr{S})$ 次强同胚，记为 $(X,\mathscr{T})\overset{(STER)}{\simeq}(Y,\mathscr{S})$。

3．如果 f 既是连续函数，又是一个开函数，则称 f 是一个同胚映射，此时称$(X,\mathscr{T})$与 $(Y,\mathscr{S})$ 同胚，记为 $(X,\mathscr{T})\simeq(Y,\mathscr{S})$。(这实际上是点集拓扑学中同胚的一个等价定义。)

4．如果 f 既是半连续函数，又是一个半开函数，则称 f 是一个半同胚映射，此时称 $(X,\mathscr{T})$ 与 $(Y,\mathscr{S})$ 半同胚，记为$(X,\mathscr{T})\overset{(S)}{\simeq}(Y,\mathscr{S})$。(这实际上正是[3]中半同胚的定义，由此可以看出我们前面建议改一下名称的道理。)

5．如果 f 既是弱连续函数，又是弱半开函数，则称 f 是一个弱同胚映射，此时称$(X,\mathscr{T})$与 $(Y,\mathscr{S})$ 弱同胚，记为 $(X,\mathscr{T})\overset{(W)}{\simeq}(Y,\mathscr{S})$。

由表 (2) 和表 (3)，我们有下列：

定理16 下表为真：

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & \text{同胚映射} \arrow[dr] & & \\ \text{强同胚映射} \arrow[r] & \text{次强同胚映射} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{弱同胚映射} & (4) \\ & & \text{半同胚映射} \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$ ∎

除同胚映射外的这几种同胚有以下性质：

定理17 强同胚具有对称性和传递性。半同胚关系和次强同胚关系皆是等价关系。弱同胚具有反身性和对称性。 ▮

设 f 是拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 上到拓扑空间 $(Y,\mathscr{S})$ 上的一一函数，g 是 $(Y,\mathscr{S})$ 上到拓扑空间 $(Z,\mathscr{R})$ 上的一一函数。为了方便起见，我们以 f_{ST} 表示 f 是强同胚映射，其余记号是自明的。我们有：

定理18 下列各命题成立：1) $g_{ST}\circ f_W$ 是 $(g\circ f)_W$。2) $g_{ST}\circ f_S$ 是 $(g\circ f)_S$。3) $g_{ST}\circ f_h$ 是 $(g\circ f)_h$。4) $g_S\circ f_{ST}$ 是 $(g\circ f)_{ST}$。5) $g_W\circ f_{ST}$ 是 $(g\circ f)_W$。b) $g_h\circ f_{ST}$ 是 $(g\circ f)_h$，其中 f_h 表示 f 是同胚映射。 ▮

最后作者对西北大学数学系王成堂教授的关怀和指教表示衷心的感谢。

参 考 文 献

[1] John L. Kelley, General Topology, Van Nostrand, Princeton, N. J. 1955.

[2] Norman Levine, Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces, *Amer. Math. Monthly.*, 70(1963), 36—41.

[3] S. Gene Crossley and Hibedrand. S. K., Semi-topological property, *Fund. Math.*, LXXIV(1972), 233—254.

[4] Crossley, A note on semitopological classes, *Proc. Amer. Math., Soc.*, 43 (1974), 416—420.

[5] —, A note on semitopological properties, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 72 (1978), 409—412.

[6] Hamlett, T. R., The property of being a Baire space is semitopological *Math. Chronicle* 5 (1977), 166—167.

Some Generalizations on the Separability and Homeomorphism

Hu Qingping (胡庆平)

(Department of Mathematics, Northwest University)

Abstract

In this paper author introduced two kinds of new ways on the separability —the separability by semi-open sets and the separability by several kinds of the functions, and introduced several new kinds of homeomorphisms. In this paper the main results were given in (1),(2),(3) and (4).