第4卷 第2期 | 数学研究与评论 | Vol.4 No.2
1984年4月 | JOURNAL OF MATHEMATICAL RRSEARCH AND EXPOSITION | April 1984

# 不动点理论的新发展(Ⅱ)下*

张石生

(四川大学)

## §2 关于多值的非扩张与平均非扩张映象的不动点定理

关于多值的非扩张和平均非扩张映象的不动点定理Itoh, Takahashi, Markin, Assad, Dozo, Lim等人分别在文章[29,20,17,18,19]中讨论过，得出了一批结果。但是恰好与单值非扩张映象相反，映Banach空间中具正规结构的弱紧的凸集到其自身的多值非扩张映象至今未得出任何的不动点定理。

为了以后叙述方便起见，我们引进一些符号：

设$(X,d)$是一度量空间，我们以$C(X)$表$X$的一切非空紧子集的集合族，以$CB(X)$表$X$的一切非空有界的闭集族$2^X$表$X$的一切子集的集合族。设$H$是$CB(X)$上由度量$d$导出的Hausdorff度量。

**定义6** 设$(X,d)$是一度量空间，$T$是映$X\to 2^X$的多值映象。设对每一$x\in X$，$Tx\in CB(X)$。我们称$T$为非扩张映象，如果

$$H(Tx,\ Ty)\leqslant d(x,y),\ \forall x,y\in X.$$

我们称$T$是平均非扩张映象，如果

$$H(Tx,Ty)\leqslant ad(x,y)+b\{d(x,Tx)+d(y,Ty)\}+C\{d(y,Tx)+d(y,Ty)\},\forall x,y\in X,$$

其中$a,b,c\geqslant 0$，$a+2b+2c\leqslant 1$。

设$A$是$B$的子集，我们以$\mathrm{bd}_BA$表$A$对于$B$的相对边界，即

$$\mathrm{bd}_BA=\mathrm{cl}(A)\cap\mathrm{cl}(B\backslash A).$$

**定义7** 设$X$是一Banach空间，设$f$是映$X$到$X$的映象，$T$是映$X$到$2^X$的多值映象。我们称$f$与$T$是可交换的，如果对每一$x\in X$，$f(Tx)\subset T(f(x))$。我们称$f$和$T$是可弱交换的，如果对任一$x\in X$，$f(\mathrm{bd}_XTx)\subset T(fx)$。

关于多值的非扩张映象，Itoh等在[17]中证明了下之结果：

**定理2.19**[17] 设$X$是一致凸的Banach空间，$K$是$X$中之一非空有界闭凸集。设$g$是映$K$到$K$的映象，且设$g$的不动点集$F(g)\neq 0$。再设$T$是映$K$到$2^K$的非扩张映象，这里对每一$x\in K$，$Tx$是一非空紧凸集。如果$g$和$T$可弱交换。则存在一点$z\in K$，使得$g(z)=z\in Tz$。

由定理2.19直接可得下面的结果：

* 1982年10月23日收到。本文(上)在第3卷(1983)第4期上发表(编辑部注)。

**定理 2.20**[17]　设$X$是一致凸的Banach空间，$K$是$X$中之一非空有界闭凸集，设$g$是映$K$到$K$的满足次之条件的映象：

$$\|gx-gy\|\leqslant a\|x-y\|+b\{\|x-Tx\|+\|y-Ty\|\}$$
$$+C\{\|x-Ty\|+\|y-Tx\|\},\ \forall x,\ y\in K,$$

其中$a\geqslant 0$，$b>0$，$c>0$，且$a+2b+2c\leqslant 1$.

又设$T$是映$K$到$2^K$的非扩张映象，而且对任一$x\in K$，$Tx\in C(X)$. 如果$g$和$T$可弱交换，则存在一元$z\in K$，使得$gz=z\in Tz$.

**定理 2.21**[17]　设$X$是一Banach空间，设$K$是$X$之一非空紧凸集，设$g$是映$K$到$K$的映象，且$F(g)\neq 0$. 再设$T$是映$K$到$2^K$的上半连续映象，使得对每一$x\in K$，$Tx$是一非空闭凸集. 如果$T$和$g$是可弱交换的，则存在一点$z\in K$，使得$gz=z\in Tz$.

关于多值的平均非扩张映象，倪录群等在[8]中证明了下面的结果：

**定理 2.22**[8]　设$X$是一自反的Opial空间，$K$是$X$的非空弱闭集，$T$是$X\to C(X)$的多值映象，且满足条件：

$$H(Tx,Ty)\leqslant a(x,y)\|x-y\|+b(x,y)\{d(x,Tx)+d(y,Ty)\}$$
$$+C(x,y)\{d(x,Ty)+d(y,Tx)\},\ \forall x,\ y\in X,$$

其中$a(x,y)$，$b(x,y)$，$C(x,y)$是依赖于$x$，$y$的非负数，且

$$a(x,y)+2b(x,y)+2C(x,y)\leqslant 1,\ \forall x,y\in X.$$

如果存在$x_0\in K$，轨道$O_T(x_0,0,\infty)$有界，而且

$$\beta=\inf_{y,z\in O_T(x_0,0,\infty)} C(y,z)>0,$$

则$T$在$K$中存在不动点.

## §3　关于单值的Caristi不动点定理

1976年Caristi在[10]中证明了一个值得十分重视的而且非常有趣的新的不动点定理. 它所考虑的映象，不要求连续性的假定.

**定理 2.23**[10]　设（$X$，$d$）是一完备的度量空间，设$f$是映$X$到$X$的映象，且满足条件：

(7)　$$d(u,f(u))\leqslant\varphi(u)-\varphi(f(u)),\ \forall u\in X,$$

这里$\varphi$：$X\to R_+$是一下半连续函数，则$f$在$X$中存在不动点.

Caristi在[10]中证明上述定理时使用的方法是超限归纳法，证明起来特别复杂，后来Browder在文章[11]中改进了证明，最近Ekeland在[12]中给出了一个较为简洁而且比较初等的证明.

值得指出的是，如果（7）中的$f$是具Lipschitz常数$\lambda\in(0,1)$的Banach压缩映象，即

$$d(f(x),\ f(y))\leqslant\lambda d(x,y),\ \forall x,\ y\in X.$$

我们定义

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}d(f^n(x),\ f^{n+1}(x)),\ x\in X,$$

则条件（7）满足，故Banach压缩映象原理是定理2.23的特例.

另外从动态系统的框架来理解定理3.1，其意义最为明显。(7)中的下半连续函数称为熵，而系统被理解为由时间$n$时的状态$x_n$过渡到时间为$n+1$时的状态$x_{n+1}=f(x_n)$，于是不等式（7）表明除$x_n=x_{n+1}$外，都有$\varphi(x_n)>\varphi(x_{n+1})$。换句话说，直到系统达到平稳态之前，熵是单调下降的。

关于定理3.1与动态系统关系之间的进一步研究，可参看Ekeland[12]，Aubin[14]第四章及Aubin[28]。

定理2.23的结果已被Caristi和Kirk分别用以研究内向映象的理论([10])和正规可解性理论([13])。正如Browder在[11]中指出的："定理2.23很可能成为非线性泛函分析进一步发展的强有力的工具"。

**定理2.24**　(Siegel)设$(X,\ d)$是一完备的度量空间，设$f(x,u)$对每一$u\in U$是映$X$到$X$的连续映象，如存在一下半连续函数$\varphi$，使得

$$d(x,f(x,u))\leqslant\varphi(x)-\varphi(f(x,u)),\quad\forall x\in X,\ \forall u\in U,$$

这里$U$是某一集合（一般为一控制集），则存在一公共不动点$x_*$，即

$$x_*=f(x_*,u),\ \forall u\in U.$$

最近Husain，Sehgal在[9]中对Caristi型映象的不动点问题，证明了下面的结果：

**定理2.25**[9]　设$(X,\ d)$是一完备的度量空间，$f$是映$X\to X$的映象，设存在下半连续函数$\varphi$：$X\to[0,\infty)$使得

(i) 如果$x\neq f(x)$，则$\varphi(x)\neq\varphi(f(x))$，

(ii) 对每一$x\in X$，存在正整数$p=p(x)$，使得

$$d(x,f^p(x))\leqslant\varphi(x)-\varphi(f(x)),$$

则$f$有一不动点。

## §4　关于多值的Caristi不动点定理

我们在§3中讨论的单值Caristi不动点定理，最近已被Husain，Sehgal，Aubin，Ekeland推广到多值的情形。他们证明了下面的一些结果。

**定理2.26**[12]　设$(X,d)$是一完备的度量空间，设$T$是映$X$到$CB(X)$的多值映象。如存在一下半连续函数$\varphi$：$X\to[0,\infty)$，使得

$$d(u,w)\leqslant\varphi(u)-\varphi(w),\quad\forall u\in X,\ w\in Tu,\tag{8}$$

则存在某一点$v\in X$，使得$\{v\}=Tv$。

以后我们把满足条件(8)的多值映象称为Caristi型的多值映象。

**定理2.27**[9]　设$S$是完备度量空间$(X,\ d)$的闭子集，设$F$：$S\to2^X$是一多值映象。设$\varphi$是映$S\to[0,\infty)$的一下半连续函数。设$F$满足条件：对每一$x\in S$，$x\notin F(x)$，存在$z\in S\backslash\{x\}$，使得

$$d(x,z)\leqslant\varphi(x)-\varphi(z).$$

则$F$有一不动点。

关于Caristi型的多值映象与由该映象定义的弱散逸系统和散逸系统之间，Aubin建立了一种奇妙的联系，为叙述方便先引进如下的定义。

**定义8** 设$(X,d)$是一完备的度量空间，设$A: X\to CB(X)$是一多值映象。函数$\psi: X\to[0,\infty)$称为$A$的弱熵，如果对一切$x\in X$，存在$y\in Ax$，使得

$$d(x,y)\leqslant\psi(x)-\psi(y).$$

映象$A: X\to CB(X)$称为弱散逸的，如果存在$A$之一弱熵。

**定义9** 对给定的多值映象$A: X\to CB(X)$，函数$\varphi: X\to[0,\infty)$称为$A$的熵，如果对一切$x\in X$和一切$y\in Ax$，有

$$d(x,y)\leqslant\varphi(x)-\varphi(y).$$

映象$A$称为散逸的，如果存在$A$之一熵。

**定义10** 一序列$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}\subset X$，称为由$x_0$出发的轨道，如果$x_{n+1}\in A(x_n)$，$n=0, 1, 2,\cdots$。

**定理2.28**[72] 任意的弱散逸的闭映象$A: X\to CB(X)$都存在不动点，而且对任一$x_0\in X$，存在一自$x_0$出发的轨道收敛于这一不动点。

**定理2.29**[72] 设$A$是具弱下半连续熵$\varphi$的散逸多值映象，则$A$有一平稳点$x_*\in X$，即$x_*$是这样的点，使得$\{x_*\}=A(x_*)$。

**定理2.30**[72] 设$(X,d)$是一完备的度量空间，$U$是一控制集，设$f: X\times U\to X$满足条件：

(i) 对每一$u\in U$，$f$关于$x$是连续的；

(ii) 存在$\varphi: X\to[0,\infty)$，使得

$$d(x,f(x,u))\leqslant\varphi(x)-\varphi(f(x,u)),\quad\forall x\in X,\ \forall u\in U,$$

则存在$x_*\in X$，使得

$$f(x_*,u)=x_*,\quad\forall u\in U.$$

## §5 Schauder不动点定理

在本世纪三十年代Schauder在[37]中证明了下面一个典型的拓扑型不动点定理，它是经典的Brouwer不动点定理的重要推广。

**定理2.31**[37] 设$X$是Banach空间中的紧凸集，$T$是映$X$到$X$的连续映象。则$T$在$X$中存在不动点。

1935年 Tychonoff把上之定理推广到局部凸线性拓扑空间，他证明了下之结果：

**定理2.32**[38] 设$X$是局部凸线性拓扑空间的紧凸集，设$T$是映$X\to X$的连续映象，则$T$在$X$中存在不动点。

1976年高桥涉在[39]中推广了上述两个定理，他证明了下列定理：

**定理2.33**[39] 设$X$是局部凸线性拓扑空间$E$的紧凸集，设$T$是映$X$到$E$的连续映象，则次之一结论成立；

(i) 存在$y_0\in X$，$Ty_0=y_0$；

(ii) 存在 $x_0 \in X$ 和定义在 $E$ 上的连续半范数 $p$，使得

$$0 < p(x_0 - Tx_0) = \min_{x \in X} p(x - Tx_0).$$

**定理 2.34**[39] 设 $X$ 是 Banach 空间 $E$ 的紧凸集，设 $T$ 是由 $X \to E$ 的连续映象，则存在 $x_0 \in X$，使得

$$\|x_0 - Tx_0\| = \min_{x \in X} \|x - Tx_0\|.$$

**注8** Tychonoff 定理可作为定理2.33的推论而得出。事实上，设定理 2.33(ii) 成立，因 $Tx_0 \in X$，取 $x = Tx_0$，则 $\min_{x \in X} p(x - Tx_0) = 0$，矛盾。故必(i)成立。

同样，Schauder 不动点定理可作为定理 2.34 的推论而得出。

## 参 考 文 献


[1] 张石生，不动点理论的新发展(Ⅰ)，数学研究与评论，Vol.2(1982)，No.3 与 Vol.3(1983)，No.2.

[2] 张石生，科学通报，第21卷，第6期 (1976)，272—275.

[3] 张石生，四川大学学报，1975年，第2期，67—78.

[4] 张石生，四川大学学报，1980年，第2期，55—66.

[5] 张石生，平均非扩张映象的公共不动点定理（已投数学进展）.

[6] 赵汉宾，科学通报，1980年，第11期，484—488.

[7] 赵汉宾，数学学报，1979年，第22卷，第4期，459—470.

[8] 倪录群，姚景齐、赵汉章，数学年刊，1980年，第1卷，第1期，63—74.

[9] Husain, S. A., Sehgal, V. M., *Math., Japonica*, V. 25, No.1(1981).

[10] Caristi, J., *Trans. Amer. Math. Soc.* 215(1976), 241—251.

[11] Browder, F. E., Fixed Point Theory and its Applications (Edited By S. Swaminathan), New York, 1976.

[12] Ekeland, I., *Amer. Math. Soc.*, V. 1, No.3(1979), 443—474.

[13] Kirk, w. A., Fixed Point Theory and its Applications, 1976.

[14] Aubin, J. P., "Applied Abstract Analysis", 1977.

[15] Bose, S. C., J. *London Math. Soc.*,(2)18(1978), 151—156.

[16] Jaiswal, A., Singh, B., *Math. Japonical*, V.21, No.2(1976), 187—195.

[17] Itoh, S., Takahashi, W., *Pacific J. Math.* V.79, No.2 (1978), 493—508.

[18] Markin, J. T., *Bull. Amer. Math. Soc.*, 74(1968), 639—640.

[19] Assad, N. A., Kirk, W. A., *Pacific J. Math.* 43(1972), 553—562.

[20] Dozo, E. L., *Proc. Amer. Math. Soc.*, 38(1973), 286—292.

[21] Goebel, K., Kirk, W. A., shimi, T. N., *Boll. Un. Mat.* Ital.,(4) 7(1973), 67—75.

[22] Browder., F. E., *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 54 (1965), 1041—1044.

[23] Kirk, W. A., *Amer. Math. Monthly*, 72(1965), 1004—1006.

[24] Kirk, W. A., *Pacific J. Math.* 38(1971), 89—94.

[25] Wong, C. S., *J. Austral Math. Soc.* 18(1974), 265—276.

[26] Göhde, D., *Math. Nachr*, 30(1965), 251—258.

[27] Holmes, R. D., Lau, A. T., *J. London Math. Soc.*,(2)5(1972), 563—573.
[28] Aubin J, P., *Proc. Amer. Math. Soc.* V. 78, No.3, (1980)391—398.
[29] Lim, T. C., *Pacific J. Math.* 53(1974), 487—493.
[30] Bruck, R. E., *Trans. Amer. Math. Soc.*, 179(1973), 251—262.
[31] Reich, S., *Canad. Math. Bull.* 14(1971), 121—124.
[32] Gupta, V. K., Srivastava, P., *Yokahama Math. J.*, 19(1971), 91—95,
[33] Wong, C. S., *Pacific J. Math.*, 48(1973), 299—312.
[34] Kannan, R., *Amer. Math. Monthy*, 76(1969), 405—408.
[35] Kannan, R., *Proc. Amer. Math. Soc.*, V. 38 (1973), No.1, 111—118.
[36] Browder, F. E., *Proc. Nat. Acad. Sci.*, U. S. A., 53(1965), 1272—1276.
[37] Schauder, J., *Studia Math.*, 2(1930), 171—180.
[38] Tychonoff, A., *Math. Ann.*,111(1935), 767—776.
[39] 高桥涉，数学，第28卷，第3号，1976，44—55.