第4卷 第3期
1984年7月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.3
July 1984

关于左移加权移位的循环向量*

赵广华

(陕西师范大学)

摘　　要

设 $\{w_n\}_1^\infty$ 是一复的有界序列。l^2 上由 $T(x_0,x_1,x_2,\cdots)=(w_1x_1,w_2x_2,\cdots)$ 定义的算子 T 称为以 $\{w_n\}_1^\infty$ 为权的左移加权移位。本文证明了 T 为循环算子的充要条件是 $\{w_n\}_1^\infty$ 至多只有一项为零；讨论了某些特殊加权移位的循环向量；并指出[1]的有误之处。所得结果是[1]中结果的推广。

1. 设 H 是复的无穷维可分 Hilbert 空间，T 是 H 上的有界线性算子。$x\in H$ 称为 T 的循环向量，若 $\{x,Tx,T^2x,\cdots\}$ 张成整个空间 H。算子 T 称为循环的，若它有一个循环向量。关于 Hilbert (Banach) 空间上算子循环向量的存在性，现已成为许多学者研究的课题，如[2][3][4][7][5][6][1]。

循环向量理论之所以引起人们的兴趣，主要是因为它与不变子空间问题密切相关。事实上，任一算子 T 的非循环向量之集 $N(T)=\cup\{M: M\in \mathrm{Lat}\ T, M\neq H\}$。显然，$T$ 有非平凡不变子空间等价于 T 有不为零的非循环向量。于是，不变子空间问题等价于是否每一算子都有不为零的非循环向量（或，是否存在这样一个算子，使所有非零向量都是它的循环向量）。从理论上讲，如果弄清了算子 T 的不变子空间，也就知道了此算子的循环向量；反之，如果能够确定算子 T 的循环向量，也就能获得关于它的不变子空间的信息。

移位算子，或更一般的加权移位算子是一类结构简单的算子。在很多场合，它们起了值得注意的作用。关于这类算子的循环向量现已有不少结果。如 Yadav, Chatterjee [1], Douglas, Shapiro 和 Shields[2] [3], Gellar[4], Herrero[5], Rabindranathan[6]. [1] 通过对权序列作某些限制，断定了左移加权移位的循环向量的存在性。在本文中，我们证明了左移加权移位为循环的充要条件是权序列至多只有一项为零。并且试图探求某些特殊加权移位的循环向量（见定理 3、4、5）。在最后一节，我们指出了 [1]的几个有误之处，并提出了改善意见。经改动的结果都蕴涵于我们的定理之中。

2. 设 $\{w_n\}_1^\infty$ 是一复的有界序列，l^2 上由 $T(x_0,x_1,x_2,\cdots)=(w_1x_1,w_2x_2,\cdots)$ 定义的算子 T 称为以 $\{w_n\}_1^\infty$ 为权的左移加权移位。不失一般性，我们总假定 $\{w_n\}_1^\infty$ 为非负实数

*1981年10月4日收到。推荐者：王国俊(陕西师大)。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

列。对满足 $w_k w_{k+1}\cdots w_n\neq 0$ 的任何 $k(\geqslant 1)$ 和 $n(\geqslant k)$，令

$$\delta_{kn}=\sup_{m\geqslant 0}\frac{w_{m+k}w_{m+k+1}\cdots w_{m+n}}{w_k w_{k+1}\cdots w_n}.$$

$\{e_n\}_0^\infty$ 表示 l^2 的标准基。

引理 1 设 $\{w_n\}_1^\infty$ 严格正，T 以 $\{w_n\}_1^\infty$ 为权。若存在一正数序列 $\{\sigma_n\}_1^\infty$，使对每一 k 都有常数 M_k，当 $n\geqslant k$ 时，$\delta_{kn}\leqslant M_k\sigma_n$，则 T 有循环向量。

证明 不失一般性，假定 $\sigma_{n+1}\geqslant\sigma_n\geqslant 1$。归纳地构造向量 $x=(x_0,x_1,x_2,\cdots)\in l^2$ 如下：取 x_0,x_1 不为零，然后取 x_2，使 $0<|x_2|^2\leqslant\frac{|x_1|^2}{2\sigma_1^2}$，一般地，若 x_n 已取好，取 x_{n+1} 使 $0<|x_{n+1}|^2<\frac{|x_n|^2}{2^n\sigma_n^2}$。显然 $x=(x_0,x_1,x_2,\cdots)\in l^2$，且 $|x_{m+n}|^2\leqslant\frac{|x_r|^2}{2^{m+n-1}\sigma_n^2}$。现证 $\bigvee_{n=0}^\infty\{T^n x\}=l^2$。记 $M=\bigvee_{n=0}^\infty\{T^n x\}$，因

$$\left\|\frac{T^n x}{w_1\cdots w_n x_n}-e_0\right\|^2=\sum_{m=1}^\infty\left(\frac{w_{m+1}\cdots w_{m+n}}{w_1 w_2\cdots w_n}\right)^2\left|\frac{x_{m+n}}{x_n}\right|^2\leqslant\delta_{1n}^2\sum_{m=1}^\infty\left|\frac{x_{m+n}}{x_n}\right|^2$$

$$\leqslant M_1^2\sigma_n^2\sum_{m=1}^\infty\frac{1}{|x_n|^2}\,\frac{|x_n|^2}{2^{m+n-1}\sigma_n^2}=M_1^2\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\to 0\,(n\to\infty),$$

故 $e_0\in M$，而

$$\left\|\frac{T^n x-w_1\cdots w_n x_n e_0}{w_2 w_3\cdots w_{n+1}x_{n+1}}-e_1\right\|^2=\sum_{m=1}^\infty\left(\frac{w_{m+2}\cdots w_{m+n+1}}{w_2 w_3\cdots w_{n+1}}\right)^2\left|\frac{x_{m+n+1}}{x_{n+1}}\right|^2,$$

同样的计算说明 $e_1\in M$。类似可证一切 $e_n\in M$。证毕。

引理 2 设 T 以 $\{w_n\}_1^\infty$ 为权，其中 $w_{n_0}=0$，而当 $n\neq n_0$ 时，$w_n\neq 0$。若存在一正数序列 $\{\sigma_n\}_1^\infty$，使对每一 $k(\geqslant n_0+1)$ 都有常数 M_k，当 $n\geqslant k$ 时，$\delta_{kn}\leqslant M_k\sigma_n$，则 T 有循环向量。

证明 仍设 $\sigma_{n+1}\geqslant\sigma_n\geqslant 1$。$x\in l^2$ 如引理 1 所构造。仿引理 1 可证对于一切 $n\geqslant n_0, e_n\in M=\bigvee_{n=0}^\infty\{T^n x\}$。于是 $y=x-\sum_{i=n_0}^\infty x_i e_i\in M$。当 $n_0=1$ 时，因 $e_0=\frac{y}{x_0}\in M$，故对于此种情况引理得证。若 $n_0>1$，容易验证 $e_0=\frac{T^{n_0-1}y}{w_1 w_2\cdots w_{n_0-1}x_{n_0-1}}\in M$，$e_1=\frac{T^{n_0-2}y-w_1\cdots w_{n_0-2}x_{n_0-2}e_0}{w_2\cdots w_{n_0-1}x_{n_0-1}}\in M$，类似可证 $e_2,\cdots,e_{n_0-1}$ 皆在 M 中。证毕。

定理 1 设 T 以 $\{w_n\}_1^\infty$ 为权，T 为循环的充要条件是 $\{w_n\}_1^\infty$ 至多只有一项为零。

证明 令 $R=\sup w_n$。当 $\{w_n\}_1^\infty$ 严格正时，取 $\sigma_n=\frac{R^n}{w_1 w_2\cdots w_n}$，$M_1=1$，$M_k=\frac{w_1 w_2\cdots w_{k-1}}{R^{k-1}}\,(k>1)$，而当 $\{w_n\}_1^\infty$ 有一项为零，譬如 $w_{n_0}=0$ 时，可取 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{n_0}$ 为任何正数，而取 $\sigma_n=\frac{R^{n-n_0}}{w_{n_0+1}w_{n_0+2}\cdots w_n}\,(n\geqslant n_0+1)$，$M_{n_0+1}=1$，$M_k=\frac{w_{n_0+1}\cdots w_{k-1}}{R^{k-n_0-1}}\,(k>n_0+1)$。由引理 1、2 立即便知 T 为循环的。如果 $\{w_n\}_1^\infty$ 中为零的项数超过 1，这时 T 的值域亏数 $\geqslant 2$，因此 T 不会有循环向量。证毕。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

对于多重加权移位也有类似的结果．为证此事，先引入下面的．

定义　设n是一自然数或$\aleph_0$．$H^{(n)}$是指n个相同H的直接和，其向量用$\{x(i)\}_1^n$表示，其中$x(i)\in H$，在$n=\aleph_0$的情形，自然应有$\sum\limits_1^\infty\|x(i)\|^2<+\infty$．$T^{(n)}$表示$n$个相同算子$T$的直接和．

定理2　设T是以$\{w_n\}_1^\infty$为权的左移加权移位，$2\leqslant m\leqslant\aleph_0$，则$T^{(m)}$为循环的充要条件是$\{w_n\}_1^\infty$的诸项皆不为零．

证明　不妨设$m=\aleph_0$，m为自然数的情形更为简单．若$\{w_n\}_1^\infty$的诸项皆不为零，由定理1的证明知$\{w_n\}_1^\infty$满足引理1之条件．设$x=(x_0,x_1,x_2,\cdots)\in l^2$如引理1所构造，用延长对角线的办法拆$x$为

$$x(1)=(x_0,\ x_1,\ 0,\ x_3,\ 0,\ 0,\ x_6,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots),$$
$$x(2)=(0,\ 0,\ x_2,\ 0,\ x_4,\ 0,\ 0,\ x_7,\ 0,\ 0,\ \cdots),$$
$$x(3)=(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ x_5,\ 0,\ 0,\ x_8,\ 0,\ \cdots),$$
$$x(4)=(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ x_9,\ \cdots),$$
$$\cdots\cdots$$

与引理1的证明没有本质的区别，容易证得$\{x(i)\}_1^\infty$是$T^{(\aleph_0)}$的循环向量．

必要性显然，因若$\{w_n\}_1^\infty$有一项为零，$T^{(\aleph_0)}$的值域亏数就大于2．证毕．

下面我们转向探求某些特殊加权移位的循环向量．

定理3　设$\{w_n\}_1^\infty$严格正且属于l^2，T以$\{w_n\}_1^\infty$为权．若对每一k有常数M_k，使当$n\geqslant k$时，$\delta_{kn}\leqslant M_k$，则每一无穷个坐标非零的向量都是T的循环向量．

证明　设$x=(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots)$有无穷个坐标不为零．如果$x_n\neq0$，则

$$\left\|\frac{T^nx}{w_1\cdots w_nx_n}-e_0\right\|^2=\sum_{m=1}^\infty\left(\frac{w_{m+1}\cdots w_{m+n}}{w_1\cdots w_n}\right)^2\left|\frac{x_{m+n}}{x_n}\right|^2\leqslant(M_2^2/w_1^2)\sum_{m=1}^\infty w_{m+n}^2\left|\frac{x_{m+n}}{x_n}\right|^2.$$

对任意$\varepsilon>0$，取N，使$(M_2^2/w_1^2)\sum\limits_{m=1}^\infty w_{m+N}^2<\varepsilon$，然后取$n_0\geqslant N$，使$|x_{n_0}|=\max\limits_{k\geqslant N}\{|x_k|\}$，于是

$$\left\|\frac{T^{n_0}x}{w_1\cdots w_{n_0}x_{n_0}}-e_0\right\|^2\leqslant(M_2^2/w_1^2)\sum_{m=1}^\infty w_{m+n_0}^2\left|\frac{x_{m+n_0}}{x_{n_0}}\right|^2\leqslant(M_2^2/w_1^2)\sum_{m=1}^\infty w_{m+n_0}^2<\varepsilon.$$

故$e_0\in M=\bigvee\limits_{n=0}^\infty\{T^nx\}$．当$x_{n+1}\neq0$时，

$$\left\|\frac{T^nx-w_1\cdots w_nx_ne_0}{w_2\cdots w_{n+1}x_{n+1}}-e_1\right\|^2=\sum_{m=1}^\infty\left(\frac{w_{m+2}\cdots w_{m+n+1}}{w_2w_3\cdots w_{n+1}}\right)^2\left|\frac{x_{m+n+1}}{x_{n+1}}\right|^2$$

与上面一样的讨论便知$e_1\in M$．继续使用此法可证对一切k，$e_k\in M$．证毕．

推论　设T如定理3所述，M是T的非平凡不变子空间．则有某个n，使$M=\bigvee\limits_{k=0}^n\{e_k\}$．

满足定理3条件之T显然是Donoghue算子的推广．当$\{u_n\}_1^\infty$、$\{v_n\}_1^\infty$是两个单调下降且属于l^2的正数序列时，以$\{u_n,v_n\}_1^\infty$为权的左移加权移位便是这种算子．

定理4　设$\{w_n\}_1^\infty$是一趋于零的正数序列，T以$\{w_n\}_1^\infty$为权．若对每一k都存在常数M_k，使当$n\geqslant k$时，$\delta_{kn}\leqslant M_k$，则任何满足下述条件的向量$x=(x_0,x_1,x_2,\cdots)$是T的循环

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

向量：存在自然数的子列 $\{n_i\}_1^\infty$，使得（i）$x_{n_i}\neq 0$，（ii）$w_{n_i+1}^2\sum_{m=1}^{\infty}\left|\frac{x_{n_i+m}}{x_{n_i}}\right|^2\to 0\ (i\to\infty)$。

定理5　设 $\{w_n\}_1^\infty$ 严格正，T 以 $\{w_n\}_1^\infty$ 为权．若对每一 k 都有常数 M_k，使当 $n\geqslant k$ 时，$\delta_{kn}\leqslant M_k$，则任何满足下述条件的向量 $x=(x_0,x_1,x_2,\cdots)$ 是 T 的循环向量：存在自然数的子列 $\{n_i\}_1^\infty$，使得（i）$x_{n_i}\neq 0$，（ii）$\sum_{m=1}^{\infty}\left|\frac{x_{n_i+m}}{x_{n_i}}\right|^2\to 0\,(i\to\infty)$。

循着引理1的证明路线容易写出定理4和定理5的证明，在此不再赘述．

3.［1］通过对权序列作某些限制，证明了 l^p（$1\leqslant p<\infty$）上左移加权移位循环向量的存在性．该文共给出五个定理，但这些定理多处有误．下面我们就指出这些有误之处，并提出改善意见．本节所用述语、符号同［1］．为清楚起见，将原定理叙述于下．

定理Y　（［1］定理1）．设 T 是 $l^p(1<p<\infty)$ 上具权序列 $\{w_m\}_1^\infty$ 的单侧加权移位，其中 $\{w_m\}_1^\infty$ 具有 q 次幂变差．设

$$\lambda=\lambda(k,n)=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{w_{m+k}\cdots w_{m+n}}{w_k\cdots w_n}\right)^q<\infty \tag{*}$$

对所有的 $k(\geqslant 2)$ 和 $n(\geqslant k)$ 成立．则 l^p 中任何满足下述条件的向量 $x=\{x_m\}_0^\infty$ 是 l^p 的循环向量：（i）$x_{n_i}\neq 0$，$i=1,2,\cdots$，（ii）$r_i^{(p)}<\infty$，对充分大的 i.

从该文的证明来看，定理的条件显然不够，它并不能保证该文所在的p.96最后的式子

$$\frac{1}{w_1^p}r_i^{(p)}\lambda^{p/q}\left(\sum_{m>n_i}|w_m^q-w_{m+1}^q|\right)^{p/q}$$

趋于零（注意 $r_i^{(p)}$ 和 λ 是随 i 而变的）．我们能够作出符合定理条件的权序列和向量，而使该文证明失效．为举此例，先证下面的

引理3　存在正数序列 $\{u_n\}_1^\infty$ 及自然数的子列 $\{n_i\}_1^\infty$，满足

$$\text{(i)}\ \sum_1^\infty u_n<\infty,\quad \text{(ii)}\ \sum_{m=1}^{\infty}\frac{u_{m+1}\cdots u_{m+n_i}}{u_1u_2\cdots u_{n_i}}\to\infty\,(i\to\infty).$$

证明　取一正数序列 $\{v_n\}_1^\infty$ 使 $\sum_1^\infty v_n<\infty$．归纳地构造 $\{u_n\}_1^\infty$ 如下：第一步，在 $\{v_n\}_1^\infty$ 中任取一项为 u_2，然后在 $\{v_n\}_1^\infty\backslash\{u_2\}$ 中取 u_1 使得 $\frac{u_2}{u_1}>1$．假定第 k 步已经取好前 $\sum_{i=1}^{k}2^i$ 个 u_n，使 $\frac{u_{2^k}u_{2^k+1}\cdots u_{2^k+2^{k-1}+\cdots+2}}{u_1u_2\cdots u_{2^{k-1}+\cdots+2+1}}>k$，第 $k+1$ 步，在 $\{v_n\}_1^\infty\backslash\{u_1,u_2,\cdots,u_{2^k+2^{k-1}+\cdots+2}\}$ 中任取 $\sum_{i=0}^{k}2^k$ 项作为 $u_{2^{k+1}}$，$u_{2^{k+1}+1},\cdots,u_{2^{k+1}+2^k+\cdots+2}$，然后在 $\{v_n\}_1^\infty\backslash\{u_1,u_2,\cdots,u_{2^k+2^{k-1}+\cdots+2},u_{2^{k+1}},u_{2^{k+1}+1},\cdots,u_{2^{k+1}+2^k+\cdots+2}\}$ 中取 $u_{2^k+2^{k-1}+\cdots+2+1}$ 使

$$\frac{u_{2^{k+1}}u_{2^{k+1}+1}\cdots u_{2^{k+1}+2^k+\cdots+2}}{u_1u_2\cdots u_{2^k+2^{k-1}+\cdots+2+1}}>k+1.$$

如此构造的 $\{u_n\}_1^\infty$ 显然满足 $\sum_1^\infty u_n<\infty$，并且若取 $n_i=\sum_0^{i-1}2^k$，就有 $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{u_{m+1}\cdots u_{m+n_i}}{u_1u_2\cdots u_{n_i}}\to\infty$ $(i\to\infty)$．证毕．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

自然，我们还可要求 $\{n_i\}_1^\infty$ 满足 $(n_{i+1}-n_i)/n_i>\xi>1, i=1,2,\cdots$。

现在，命 $\{u_n\}_1^\infty$、$\{n_i\}_1^\infty$ 如上所述，$w_n=u_n^{1/q}$，$x=\left\{\left(\frac{1}{2^n}\right)^{1/p}\right\}_0^\infty$，则 $\{w_n\}_1^\infty$ 和向量 x 都满足定理 Y 之条件，但

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{w_{m+2}\cdots w_{m+n_i+1}}{w_1 w_2\cdots w_{n_i}}\right)^q\right)^{p/q}\xi_i^{(p)}\to\infty\ (i\to\infty),$$

自然 $\frac{1}{w_1^p}r_i^{(p)}\lambda^{p/q}\left(\sum_{m>n_i}|w_m^q-w_{m+1}^q|\right)^{p/q}\to\infty\ (i\to\infty)$。似乎应把条件（*）和（ii）中的"$\infty$"改为常数。此外，定理中的条件（ii）是当然满足的（注意 $x\in l^p_1$），而且条件（*）已经蕴涵了"$\{w_m\}_1^\infty$ 具有 q 次幂变差"。事实上，条件（*）等价于 $\{w_m\}_1^\infty\in l^q$，从此立即知道 $\{w_m\}_1^\infty$ 具有 q 次幂变差。将定理 Y 中两处的"∞"换为常数无疑可行。但显然还可改善。改善的结果叙述于下。

定理1′　设 T 是 l^p 上具权序列 $\{w_m\}_1^\infty$ 的单侧加权移位，若对每一 $k(\geqslant 1)$，存在常数 M_k，使

$$\lambda=\lambda(k,n)=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{w_{m+k}\cdots w_{m+n}}{w_k w_{k+1}\cdots w_n}\right)^q\leqslant M_k$$

对一切 $n(\geqslant k)$ 成立，则 l^p 中任何满足下述条件的向量 $x=\{x_m\}_0^\infty$ 是 l^p 的循环向量：存在 $\{x_m\}_0^\infty$ 的子列 $\{x_{m_i}\}_1^\infty$ 和常数 R，使对一切 i，$x_{m_i}\neq 0$，$r_i^{(p)}\leqslant R$。

[1]中定理 2(p. 97) 和定理 5(p. 98) 关于权序列的条件，以及定理 3(p. 97) 关于向量的条件也有同样的错误。此外，定理 3 和定理 4 中关于权序列的限制都可以放宽。譬如定理 3 中"对一切 $p(\geqslant 0)$，$m(\geqslant 2)$ 和 $n(\geqslant m)$，

$$\delta=\sup_{p,m,n}\frac{w_{p+m}\cdots w_{p+n}}{w_m\cdots w_n}<\infty。"$$

的条件可放宽为"对每一 $m(\geqslant 2)$，

$$\delta_m=\sup_{n\geqslant m,\,p\geqslant 0}\frac{w_{p+m}\cdots w_{p+n}}{w_m\cdots w_n}<\infty。"$$

最后我们指出，由于第 2 节中诸结果的证明只用到范数而不涉及内积，故全部结果对 $l^p(1\leqslant p<\infty)$ 也适用。若将这些结果写成 l^p 中的形式，[1]中诸定理经改动后可归结于我们的定理 4, 5 和 3。如果单从"存在性"这一点考虑，这些结果自然都蕴涵于我们的定理 1 中。

本文是在叶彦润教授、王幼鹏付教授和路见亭傅教授的指导下写出的，谨致谢忱。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

参 考 文 献

[1] Yadav, B. S. and Chatterjee, S., Cyclic vectors of weighted shifts on l^p spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 80 (1980), 95—99.

[2] Douglas, R. G., Shapiro, H. S. and Shields, A. L., On cyclic vectors of the backward shift. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 (1967). 156—159.

[3] ——, Cyclic vectors and invariant subspaces for the backward shift operator, *Ann. Inst.*, Fourier (Grenoble),20 (1970), fasc. 1,37—76.

[4] Gellar, R., Cyclic vectors and parts of the spectrum of a weighted shift. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 146(1969), 69—85.

[5] Herrero, D. A., Eigenvectors and cyclic vectors for bilateral weighted shifts. *Rev. Un. Mat.*, Argentina, 26 (1972), 26—41.

[6] Rabindranathan, M., On cyclic vectors of weighted shifts. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 44 (1974), 293—299.

[7] Deddens, J. A., Gellar, R. and Herrero, D. A., Commutants and cyclic vectors. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 43 (1974), 169—170.

On Cyclic Vectors of Backward Weighted Shifts

Zhao Guanghua

Abstract

Let $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a bounded sequence of complex numbers. The unique operator T on l^2 defined by $T(x_0, x_1, x_2, \cdots) = (w_1x_1, w_2x_2, w_3x_3, \cdots)$ is called a backward weighted shift. In this paper, it is shown that T is cyclic if and only if $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ has at most one term equal to zero; cyclic vectors of certain special weighted shifts are discussed; and it is also pointed out that there are something wrong in the contents of theorems in [1]. The results are extensions to those in [1].

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.