第4卷 第3期
1984年7月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.3
July 1984

S-分离性*

胡庆平

（西北大学）

自一九六三年Norman Levine引入半开集以来[1]，特别是半拓扑性质[2]和S-闭空间[4]等概念被引入以来，一般拓扑学在这一范围内出现了大量的论文(见[3,5—8])，提出了不少新思想、新概念及新结果。作者在[11]中提出了S-分离性的概念，在本文中则作进一步的讨论，得到一系列有趣的结果。

§1 S_i—空间

拓扑空间$(X,\mathscr{T})$里的一个集合A被称为半开的，当且仅当$\exists T\in\mathscr{T}$，使得$T\subseteq A\subseteq T^-$，其中$T^-$是$T$的闭包。$(X,\mathscr{T})$中一切半开集的族记为s.o.$(X)$。易知下列事实(见[1])：

1. $\mathscr{T}\subseteq$s.o.(X)。
2. 如果$A\in$s.o.(X)，且$A\subseteq B\subseteq A^-$，则$B\in$s.o.$(X)$。
3. 如果$A\subseteq Y\subseteq X$，$A\in$s.o.(X)，Y是X的子空间，则$A\in$s.o.(Y)。

类似于用开集定义拓扑空间的分离性，作者在[11]中用半开集定义了拓扑空间的S-分离性，即有下列的：

定义1 设$(X,\mathscr{T})$是一个拓扑空间：

1) 如果$\forall x,y\in X$，$\exists s\in$s.o.(X)，使

$$x\in s,\ y\bar{\in} s;\ \text{或}\ x\bar{\in} s,\ y\in s,$$

则称$(X,\mathscr{T})$满足S_0-分离性公理，并称$(X,\mathscr{T})$为S_0-拓扑空间。

2) 如果$\forall x,y\in X$，$\exists s_1,s_2\in$s.o.(X)，使$x\in s_1$，$y\in s_2$，且$x\bar{\in} s_2$，$y\bar{\in} s_1$，则称$(X,\mathscr{T})$满足S_1-分离性公理，并称$(X,\mathscr{T})$为S_1-拓扑空间。

3) 如果$\forall x$，$y\in X$，$\exists s_1,s_2\in$s.o.(X)，使$x\in s_1$，$y\in s_2$，$s_1\cap s_2=\phi$，则称$(X,\mathscr{T})$满足S_2-分离性公理，并称$(X,\mathscr{T})$为S_2-拓扑空间。

4) 如果$\forall x\in X$及$\forall$闭子集$F\subseteq X$，使得$x\bar{\in} F$，则$\exists s_1,s_2\in$s.o.(X)，使$x\in s_1$，$F\subsetneq s_2$，$s_1\cap s_2=\phi$，则称$(X,\mathscr{T})$满足S_3-分离性公理，并称$(X,\mathscr{T})$为S-正则空间或S_3^*-空间。对于T_1的S-正则空间，我们称之为S_3-空间。

5) 如果$\forall$闭子集$F_1,F_2(\subseteq X)$，使得$F_1\cap F_2=\phi$，则$\exists s_1,s_2\in$s.o.(X)，使$F_1\subseteq s_1$，F_2

*1981年10月27日收到。

$\subseteq s_2$，$s_1\cap s_2=\phi$，则称$(X,\mathscr{T})$满足S_4-分离性公理，并称$(X,\mathscr{T})$为S-正规空间或S_4^*-空间。对于T_1的S-正规空间，我们称之为S_4-空间。

由定义1，T_i-空间$(i=0,1,2,3,4)$的定义及$\mathscr{T}\subseteq$s.o.(X)这一事实，我们易知有下列：

定理1 下列关系表成立：

$$\begin{array}{ccccccccc} T_0 & \longleftarrow & T_1 & \longleftarrow & T_2 & \longleftarrow & T_3 & \longleftarrow & T_4 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S_0 & \longleftarrow & S_1 & \longleftarrow & S_2 & \longleftarrow & S_3 & \longleftarrow & S_4 \end{array} \tag{1}$$

其中T_i及S_i分别表示相应的拓扑空间。 ▌

显然，一般地，S_i-空间未必是T_i-空间，而在一定的条件下，S_i-空间可以成为T_i-空间。作为例子，下列结果给出S_0的情形，而其它S_i-空间的情形可类似地考虑之。

定理2 一个S_0-空间$(X,\mathscr{T})$是一个T_0-空间当且仅当$\forall x\in X$，$y\in X$，$x\neq y$，$\exists s\in$ s.o.(X)，使$x\in s^0\subseteq s$，$y\notin s$，或$y\in s^0\subseteq s$，$x\notin s$。 ▌

我们再讨论一下S_3^*-空间及S_4^*-空间。为了方便起见，我们在这里叙述一下半开集理论中两个常用的概念。设$A\in$ s.o.(X)，则称$X\sim A$为一个半闭集。设$A\subseteq X$，A的半闭包，记为$\underline{A}$，是X里包含A的一切半闭集的交。我们易知有下列结果：

定理3 拓扑空间$(X,\mathscr{T})$是一个S_3^*-空间当且仅当$\forall x\in X$及x的任一开邻域U，存在一个$A\in$ s.o.(X)及一个半闭集B使

$$x\in A\subseteq B\subseteq U. \tag{2}$$

证明 必要性 设$(X,\mathscr{T})$是一个S_3^*-空间。$\forall x\in X$及x的任一开邻域U，则$F=X\sim U$是不包含x的一个闭集。于是$\exists$ $A\in$ s.o.(X)及$C\in$ s.o.(X)，使

$$x\in A,\ F\subseteq C,\ A\cap C=\phi. \tag{3}$$

命$B=X\sim C$，则B是一个半闭集，且有(2)成立。

充分性 设x是$(X,\mathscr{T})$中任一点，F为X中任一闭子集，且$x\notin F$，那么$U=X\sim F$是x的一个开邻域。故$\exists$：$A\in$ s.o.(X)及一个半闭集B使(2)成立。命$C=X\sim B$，则$C\in$ s.o.(X)，且(3)成立，故$(X,\mathscr{T})$是一个S_3^*-空间。 ▌

推论 对于S_3^*-拓扑空间$(X,\mathscr{T})$中任一点x的任一个开邻域U存在一个$A\in$ s.o.(X)，使

$$x\in A\subseteq\underline{A}\subseteq U. \tag{4}$$ ▌

定理4 拓扑空间$(X,\mathscr{T})$是一个S_4^*-空间当且仅当对于X中的任一闭子集F及F的任一开邻域U，存在一个$A\in$ s.o.(x)及一个半闭集B使

$$F\subseteq A\subseteq B\subseteq U. \tag{5}$$ ▌

推论 对于S_4^*-空间$(X,\mathscr{T})$中任一闭子集F的任一开邻域U存在一个$A\in$ s.o.(X)，使

$$F\subseteq A\subseteq\underline{A}\subseteq U. \tag{6}$$ ▌

类似于用开集定义Urysohn空间及强Hausdorff空间，我们也可以用半开集定义类似的空间。

定义2 一个拓扑空间$(X,\mathscr{T})$称为一个S-Urysohn空间，如果对于每对不同的点x，

$y\in X$，存在$s_1, s_2\in$ s.o.(X)，使得$x\in s_1$，$y\in s_2$，且$s_1^-\cap s_2^-=\phi$。

定义 3　一个拓扑空间$(X,\mathscr{T})$称为一个强S_2-空间，如果$(X,\mathscr{T})$是一个S_2-空间，且对于每个无限子集$A\subseteq X$，存在两两不相交的半开集的一个序列$\{s_n: n\in\omega\}$，使得对于每个$n\in\omega$有$A\cap s_n\neq\phi$。

显然，Urysohn 空间必定是S-Urysohn 空间，强 Hausdorff 空间一定是强S_2-空间。

§2　半拓扑性质

设f是从拓扑空间$(X,\mathscr{T})$到拓扑空间$(Y,\mathscr{G})$的一个映射，在[11]中我们有下列：

定义 4　f被称为半连续的，若$\forall s\in$ s.o.(Y)，则$f^{-1}[s]\in$ s.o.(X)（在[2]中这类映射被称为不定的(irresolute)；在[11]中指出了称为半连续映射的理由）。有时，为方便起见，我们简称为S-映射。

定义 5　f被称为半开的，如果$\forall s\in$ s.o.(X)，则$f[s]\in$ s.o.(Y)。（在[2]中这类映射被称为前半开的(Presemi-open)；在[11]中指出了称为半开映射的理由）。

定义 6　f被称为是一个半同胚映射，如果f是一一的、到上的、半连续的和半开的，此时，X与Y被称为半同胚的，记为：f: $X\overset{(s)}{\cong}Y$。在半同胚下保持的性质被称为半拓扑性质。

易见，一个半拓扑性质一定是拓扑性质。在[2-3]中给出了大量的半拓扑性质，也指出了某些拓扑性质并非半拓扑性质。在本节中我们来考察S_i是否半拓扑性质的问题，我们首先有下列：

定理 5　S_0，S_1和S_2是半拓扑性质。

证明　仅以S_2证明之。设$(X,\mathscr{T})$是一个S_2-空间，f是$(X,\mathscr{T})$到拓扑空间$(Y,\mathscr{G})$的一个半同胚映射。设y_1，y_2是$(Y,\mathscr{G})$中任二不同点，且$x_1=f^{-1}(y_1)$，$x_2=f^{-1}(y_2)$，则x_1，x_2是$(X,\mathscr{T})$中二不同点。由于$(X,\mathscr{T})$是S_2的，故$\exists A_1$，$A_2\in$ s.o.(X)，使得$x_1\in A_1$，$x_2\in A_2$，$A_1\cap A_2=\phi$。由于f是半同胚映射，故$f[A_1]$，$f[A_2]\in$ s.o.(Y)，且$y_1\in f[A_1]$，$y_2\in f[A_2]$，$f[A_1]\cap f[A_2]=\phi$。　▌

在这个定理的证明中只用到了“f是一一的、到上的、半开映射”这一条件。所以我们有下列：

推论 1　S_0，S_1及S_2是一一的、到上的、半开映射下的不变性。　▌

推论 2　S_0，S_1及S_2都是拓扑性质。　▌

S_3及S_4并不是半拓扑性质。这是由于一方面涉及到闭集、闭集在半开映射或半连续映射下一般都不能保持；另一方面又涉及到T_1-分离性，而T_1并不是半拓扑性质（见[2]）。但是，由定理3及4易知成立下列：

定理 6　S_3^*及S_4^*是一一、到上、连续、半开映射下的不变性。　▌

由定义3不难知道成立下列：

定理 7　强S_2是半拓扑性质，因此也是拓扑性质。　▌

推论　强S_2是一一、到上、半开映射下的不变性。　▌

易知，“是S-Urysohn 空间”的性质并不是半拓扑性质，而是一个拓扑性质。

§3　可积性

在本节我们来讨论 S_i-空间的可积性问题。我们先给出如下两个引理。

引理 1　设 $(X,\mathcal{T})=\Pi\{(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha):\alpha\in\Lambda\}$ 是一个乘积空间，$\mathcal{T}$ 是乘积拓扑，$(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$ 是第 α 个坐标空间。设 $(X,\mathcal{T})$ 到 $(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$ 的射影为 P_α。如果 $A\in s.o.(X_\alpha)$，则 $P_\alpha^{-1}[A]\in s.o.(X)$。 ▮

引理 2　条件同引理 1，$A,B\in s.o.(X_\alpha)$，且 $A\cap B=\phi$，则 $P_\alpha^{-1}[A]$ 与 $P_\alpha^{-1}[B]$ 是 $(X,\mathcal{T})$ 中两个不相交的半开集。 ▮

由此二引理易得下列：

定理 8　S_0，S_1，S_2 都是可积的(productive)。 ▮

问题　S_3 和 S_4，尤其是 S_3^* 及 S_4^* 是否可积性？目前作者还不知道。不过，我们在这里可讨论有限可积的问题。为此尚须下列两个易知引理，即有：

引理 3　若 F 是 X_α 中的半闭性，则 $P_\alpha^{-1}[F]$ 是 $X=\Pi X_\alpha$ 中的半闭集。 ▮

引理 4　若 $(X,\mathcal{T})=\Pi\{(X_i,\mathcal{T}_i):i<n\}$，$A_i$ 和 B_i 分别是 X_i 中的半开集和半闭集，$i=0,1,2,\cdots,n-1$，则 $\prod_{i=1}^{n}A_i$ 和 $\prod_{i=1}^{n}B_i$ 分别是 X 中的半开集和半闭集。 ▮

现在我们可有下列：(证明从略。)

定理 9　S_3^* 及 S_4^* 是有限可积性。 ▮

类似于定理 8，我们易知成立：

定理10　“是 S-Urysohn 空间”的性质是一个可积性。 ▮

但是，“是强 S_2-空间”的性质却只是一个有限可积性，即有下列：

定理11　有限个强 S_2-空间的乘积是一个强 S_2-空间。 ▮

§4　可和性

现在我们来讨论 S_i 有否可和性的问题。作者在[10]中引入了和空间及可和性等一系列的概念。为了方便起见，在这里列出下列：

定义 7　拓扑空间族 $\{(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha):\alpha\in\Lambda\}$ 的和拓扑空间(简称为和空间) $(X,\mathcal{T})$ 是 $X=\cup\{X_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$，且 $\mathcal{T}$ 是以 $\mathcal{T}^*=\cup\{\mathcal{T}_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 为子基的拓扑，记为

$$(X,\mathcal{T})=\cup\{(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha):\alpha\in\Lambda\},\tag{7}$$

其中 $(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$ 称为第 α 个生成空间。若 Λ 为有限集，称 $(X,\mathcal{T})$ 为有限和空间。可数-和空间等概念是自明的。若 $(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$ 皆具有某种性质 P，则 $(X,\mathcal{T})$ 也具有这种性质，称 P 为关于 $\{(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha):\alpha\in\Lambda\}$ 的一种可和性。若这种可和性与一切 $(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$ 的选取无关，也与 Λ 的势无关，则称之为一种绝对可和性；否则称为相对(或条件)可和性。

易知，T_0 及 T_1 都有绝对可和性。一般地，S_i 并不是绝对可和性，因为任一个生成空间 $(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$ 中的半开集未必是 $(X,\mathcal{T})$ 中的半开集。但是，对于一种特殊的和空间——强闭和空间我们就可以讨论它们的(相对)可和性。

定义 8　设 $(X,\mathcal{T})$ 是和空间(7)。如果 $\forall i,j\in\Lambda$，$X_i\sim X_j$ 是和空间 $(X,\mathcal{T})$ 中的开集，则称 $(X,\mathcal{T})$ 是闭和空间。

易知，和空间$(X,\mathscr{T})$是闭和空间⟺任一X_i是$(X,\mathscr{T})$中的开-闭集⟺任一$X\sim X_i$是$(X,\mathscr{T})$中的开-闭集⟺任一$X_i\sim X_i$是$(X,\mathscr{T})$中的开-闭集⟺任一X_i中的任一闭集一定是$(X,\mathscr{T})$中的闭集(见[10])。

定义9　我们称和空间(7)是一个强和空间，如果每个$(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$ $(\alpha\in\Lambda)$是$(X,\mathscr{T})$的一个子空间，即X_α作为$(X,\mathscr{T})$的子空间的相对拓扑就是$\mathscr{T}_\alpha$。

现在我们有下列：

引理5　设$(X,\mathscr{T})$是强闭和空间(7)，则任一生成空间$(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$中的任意的半开集$A\in$ s.o.(X)。 ∎

引理6　设$(X,\mathscr{T})$是闭和空间(7)，则$\forall\alpha\in\Lambda$，$\beta\in\Lambda$，$X_\alpha\sim X_\beta$及X_β都$\in$ s.o.(X)。∎

定理12　对于强闭和空间，S_0，S_1和S_2都是可和性。

证明　仅就S_2予以证明。设$(X,\mathscr{T})$是闭和空间(7)，其中每个生成空间$(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$都是$S_2$-空间。设$x$，$y$是$X$中任二点。如果$x$，$y$同属于某一个生成空间$(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$，由于$(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$是$S_2$的，故有$A$，$B\in$ s.o.(X_α)，使$x\in A$，$y\in B$，$A\cap B=\phi$。由引理5，A，$B\in$ s.o.(X)，故对于这种情况定理得证。如果x，y分别属于两个不同的生成空间，不妨设$x\in X_\alpha$，$y\in X_\beta$，$\alpha\neq\beta,\alpha,\beta\in\Lambda$。那么由引理6知，$X_\alpha\sim X_\beta$及$X_\beta\in$ s.o.(X)，且$(X_\alpha\sim X_\beta)\cap X_\beta=\phi$，从而对这种情况定理亦成立。 ∎

定理13　设$(X,\mathscr{T})$是强闭和空间(7)，其每一个生成空间是S_3-空间，则$(X,\mathscr{T})$是S_3-空间。 ∎

对于一般的强闭和空间，S_4仍未必是可和性。但是，对强闭有限和空间，仍有这个结果，即有以下：

定理14　对于强闭有限和空间，S_4是一种可和性。 ∎

对于S-Urysohn空间及强S-空间，我们类似地有下列结果：

定理15　“是S-Urysohn空间”的性质是一个强闭可和性。“是强S-空间”的性质是有限强闭可和性。

有关S-分离性的其它结果，这里不一一赘述了，拟在另文再述。

参　考　文　献

[1] Norman Levine, Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces, *Amer. Math. Monthly.*, 70 (1963), 36-41.

[2] Gene Crossley, S. and Hilbedrand, S. K., semi-topological properties, *Fund. Math.*, LXXIV (1972), 233-254.

[3] Gene Crossley, S., A note on semi-topological properties, *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 72, Num. 2 (1978), 409-412.

[4] Travis Thompson, S-closed space, *ibid*, Vol. 60(1976), 335-338.

[5] —, Semicontinuous and irresolute images of s-closed spaces, *ibid.*, Vol. 66., Num, 2(1977), 359-362.

[6] Asha Mathur, A note on S-closed spaces, *ibid*, Vol. 74, Num. 2(1979), 350-352.

[7] Takashi Noiri, A note on extremally disconnected spaces, *ibid*, Vol 79, Num. 2(1980), 327 330.

[8] 王国俊，S-闭空间的性质，数学学报，1(1981)，55-63.

[9] Kelley, J. L., General Topology, New York, 1955.

[10] 胡庆平，拓扑空间的和空间，陕西省数学会，一九八一年年会论文集，71—72.

[11] 胡庆平，点集拓扑中的分离性和同胚关系的一些推广，数学研究与评论，2(1984)，113—117.

The S-Separations

Hu Qingping

(Northwest University)

In this paper, we discuss on the basis of [11] many properties on the S-separations, we introduce also the S-Urysohn spaces and the strong S_2-Spaces and discuss their several properties.