第4卷 第3期
1984年7月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.3
July 1984

一类二阶方程的极限边值问题*

周钦德　　　杜瑞芝
（吉林大学）　　（辽宁师院）

§1 引 言

本文研究如下类型的极限边值问题：

(X) $$\ddot{x}=X(t,x,\dot{x})$$

(AB) $$p\dot{x}(0)+qx(0)=r,\quad x(\infty)=\text{const}.$$

在展开讨论时，边值条件(AB)又细分为：

(A_1) $$x(0)=\alpha$$

(A_2) $$\dot{x}(0)=ax(0)+b$$

(B_1) $$x(\infty)=0$$

(B_2) $$x(\infty)=\text{const.}\neq 0$$

其中α、a和b都是任意实数，$a\geqslant 0$。

很多实际问题的研究中提出了这类边值问题，有很多作者讨论了这类边值问题解的存在性与唯一性（例如见[1]、[2]），也有一些作者研究了这类边值问题解存在的充分必要条件（例如见[2]—[4]）。

如果方程(X)是线性方程

(1) $$\ddot{x}=f(t)x,$$

文[2]曾经指出：当$f(t)$于$t\geqslant 0$上非负、连续时，方程(1)存在满足条件(B_2)的解的充要条件是成立关系式：

(2) $$\int_0^\infty tf(t)\,dt<\infty.$$

当加强$f(t)$为：于$t\geqslant 0$上恒正、连续时，文[3]指出，方程(1)存在着满足条件(A_2)（要求$a>0$）和(B_1)的唯一解的充要条件是成立关系式：

(3) $$\int_0^\infty tf(t)\,dt=\infty.$$

文[4]则针对一般非线性方程，在假设

(4) $$f(t)h(x)\leqslant x^{-1}X(t,x,\dot{x})\leqslant f(t)H(x)$$

下，讨论了边值问题(X)(AB)解存在的充要条件。这里方程(X)虽已比方程(1)前进一大

*1981年9月24日收到。

步，可是从某种意义说，它仍属不含 $\dot{x}$ 情形。本文将把假设（4）放宽为

（5） $$f(t)h(x,\dot{x})\leqslant x^{-1}X(t,x,\dot{x})\leqslant f(t)H(x,\dot{x})$$

并全面地推广文[4]中相应的结果。另外，本文还讨论了这类边值问题的解对边值的连续相依性。无疑地，这也是很重要的。

本文恒假定 $X(t,x,\dot{x})$ 于 $t\geqslant 0,-\infty<x,\dot{x}<\infty$ 上连续，保证方程(X)的解恒由初值唯一确定，且当 $x\neq 0$ 时关系式（5）成立，其中 $f(t)$、$h(x,\dot{x})$ 和 $H(x,\dot{x})$ 连续，当 $x\neq 0$ 时恒正。在某些场合，我们将补充下述条件：

Ⅰ 对任一正数 l，恒存在 $s\geqslant 0$ 上正的连续函数 $g_l(s)$，满足 $\int_0^\infty sg_l^{-1}(s)ds=\infty$，而于 $|x|\leqslant l$，$|y|<\infty$ 上成立不等式：$H(x,y)\leqslant g_l(|y|)$。

Ⅱ $X(t,x,y)$ 于 $t\geqslant 0$，$-\infty<x,y<\infty$ 上对 x,y 局部地满足 Lipschitz 条件，且是 x 的不减函数。

Ⅲ 对任何正数 l，当 $|x|\to\infty$ 时，$|x|h(x,y)\to\infty$ 于 $|y|\leqslant l$ 上一致地成立。

§2 方程(X)的解的若干性质

引理1 如果 $x(t)$ 是方程（X）于 $0\leqslant t<\infty$ 上有定义且有界的解，则于 $0\leqslant t<\infty$ 上或者 $x(t)\equiv 0$，或者是下列两种情形之一：

（6） $$0<x(t)\leqslant x(0),\quad \dot{x}(0)\leqslant\dot{x}(t)<0,\quad \ddot{x}(t)>0;$$

（7） $$x(0)\leqslant x(t)<0,\quad 0<\dot{x}(t)\leqslant\dot{x}(0),\quad \ddot{x}(t)<0.$$

注意到对 $X(t,x,\dot{x})$ 的假设，引理显然成立。

引理2 如果 $x(t)$ 是方程（X）于 $0\leqslant t<\infty$ 上有定义且有界的非零解，则 $x(\infty)=0$ 的充要条件是关系式（3）成立。

证明 下面以情形(6)为例来证。先证必要性。设 M 是 $H(x,y)$ 于 $0\leqslant x\leqslant x(0),\dot{x}(0)\leqslant y\leqslant 0$ 上的最大值。如果关系式（3）不成立，则当 $0\leqslant t<\infty$ 时

$$\int_t^\infty \tau f(\tau)d\tau\geqslant\int_t^\infty ds\int_s^\infty f(\tau)d\tau\geqslant\int_t^\infty ds\int_s^\infty\frac{\ddot{x}(\tau)}{Mx(\tau)}d\tau\geqslant\frac{1}{M}.$$

只要 t 充分大便引出矛盾。再证充分性。如果 $x(\infty)\neq 0$，设 m 是 $h(x,y)$ 于 $x(\infty)\leqslant x\leqslant x(0)$，$\dot{x}(0)\leqslant y\leqslant 0$ 上的最小值，这时 $m>0$ 且

$$x(0)-x(\infty)=\int_0^\infty ds\int_s^\infty\ddot{x}(\tau)d\tau\geqslant mx(\infty)\int_0^\infty\tau f(\tau)d\tau.$$

可见关系式（3）不成立，矛盾。证完。

引理3 如果 $\phi(t)$ 和 $\phi_n(t)$ $(n=1,2,\cdots)$ 都是方程(X)于 $0\leqslant t<\infty$ 上有定义的有界解，当 $n\to\infty$ 时，$\phi_n(0)\to\phi(0)$，$\dot{\phi}_n(0)\to\dot{\phi}(0)$，则当 $n\to\infty$ 时，$\phi_n(t)\to\phi(t)$，$\dot{\phi}_n(t)\to\dot{\phi}(t)$ 于 $0\leqslant t<\infty$ 上一致地成立。

证明 由于 $\dot{\phi}(\infty)=0$ 且对任意正数 T，从引理1知于 $T\leqslant t<\infty$ 上

$$|\phi_n(t)-\phi(t)|\leqslant|\phi_n(T)|+|\phi(T)|\leqslant|\phi_n(T)-\phi(T)|+2|\phi(T)|,$$

$$|\dot{\phi}_n(t)-\dot{\phi}(t)|\leqslant|\dot{\phi}_n(T)-\dot{\phi}(T)|+2|\dot{\phi}(T)|,$$

因此在 $\phi(\infty)=0$ 时，由解对初值的连续性便知引理成立。在 $\phi(\infty)\neq 0$ 时，无妨设 $|\phi_n(0)|\leqslant 2|\phi(0)|$，$|\dot{\phi}_n(0)|\leqslant 2|\dot{\phi}(0)|$，并记 M 为 $H(x,y)$ 于 $|x|\leqslant 2|\phi(0)|$，$|y|\leqslant 2|\dot{\phi}(0)|$ 上的

最大值，则从引理1见，当 $0\leqslant t<\infty$ 时，

$$|\phi_n(t)-\phi_n(\infty)|=\int_t^\infty ds\int_s^\infty|\ddot{\phi}_n(\tau)|d\tau\leqslant 2|\phi(0)|M\int_t^\infty \tau f(\tau)d\tau$$

且对任意正数 T，于 $T\leqslant t<\infty$ 上有：

$$|\phi_n(t)-\phi(t)|\leqslant|\phi_n(t)-\phi_n(\infty)|+|\phi_n(\infty)-\phi_n(T)|+|\phi_n(T)-\phi(T)|$$
$$+|\phi(T)-\phi(\infty)|+|\phi(\infty)-\phi(t)|$$

由此由引理2及解对初值的连续性知此时引理仍成立。证完。

引理4 假设条件Ⅰ成立，则对半平面 $t\geqslant 0$，$-\infty<x<\infty$ 上的任一有界闭域 Ω 和任一正数 α，必存在正数 β，使得方程(X)满足初值条件 $x(t_0)=x_0$，$\dot{x}(t_0)=\dot{x}_0$ 的解 $x(t)$ 满足不等式 $|\dot{x}(t)|<\beta$，只要 $|\dot{x}_0|\leqslant\alpha$ 且当 τ 从 t_0 连续变化到 t 时 $(\tau,x(\tau))\in\Omega$。

此引理正是文[5]的引理1。

引理5 假设条件Ⅱ成立。如果 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 都是方程(X)满足条件(A_1)或(A_2)于 $0\leqslant t<\infty$ 上定义的解，则或者 $x_1(t)\equiv x_2(t)$ $(0\leqslant t<\infty)$，或者

(8) $$|x_1(t)-x_2(t)|>0 \quad (0<t\leqslant\infty)$$

证明 记 $u(t)=x_1(t)-x_2(t)$。如果 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 都满足条件(A_1)，则 $u(0)=0$。若 $u(t)\not\equiv 0$ 且式(8)也不成立，则必存在 t_1、t_2 $(0\leqslant t_1<t_2\leqslant\infty)$，使得 $u(t_1)=u(t_2)=0$，$u(t)\neq 0\,(t_1<t<t_2)$，不妨设 $u(t)>0\,(t_1<t<t_2)$。于是存在有限值 $\xi\in(t_1,t_2)$ 使得 $\dot{u}(\xi)=0$，$\dot{u}(t)>0\,(t_1\leqslant t<\xi)$。由条件Ⅱ有：

(9) $$\ddot{u}(t)\geqslant c(t)\dot{u}(t) \qquad (t_1\leqslant t<\xi),$$

其中 $c(t)=[X(t,x_1(t),\dot{x}_1(t))-X(t,x_1(t),\dot{x}_2(t))]\cdot\dot{u}(t)^{-1}$，解之得

(10) $$\dot{u}(t)\geqslant\dot{u}(t_1)\exp\left\{\int_{t_1}^t c(\tau)d\tau\right\} \qquad (t_1\leqslant t<\xi).$$

由此即见 $\dot{u}(\xi)>0$，矛盾。如果 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 都满足条件(A_2)，则仍用反证法并按相仿的推理可以推出类似的矛盾。证完。

§3 边值问题(X)(A_1)(B_1)

定理1 当 $\alpha=0$ 时，边值问题(X)(A_1)(B_1)有且只有零解；当 $\alpha\neq 0$ 时，如果条件Ⅰ也成立，则边值问题(X)(A_1)(B_1)有解的充要条件是关系式(3)成立。

证明 当 $\alpha=0$ 时，显然；当 $\alpha\neq 0$ 时，按引理2只须证明方程(X)存在着满足条件(A_1)且于 $0\leqslant t<\infty$ 上有定义的有界解。下面以 $\alpha>0$ 为例来证。

记 $x(t,\beta)$ 为方程(X)满足条件 $x(0)=\alpha$，$\dot{x}(0)=\beta$ 的解，而 E 是这样的 β 构成的集合：相应的解 $x=x(t,\beta)$ 与解 $x=0$ 相交。由引理4知，只要 $|\beta|$ 充分大且 $\beta<0$ 便有 $\beta\in E$；而非负之 β 显然是 E 的上界，因此 E 有上确界，记为 β_0，则由确界定义和解对初值的连续性易见 $x(t,\beta_0)$ 即为所求之解。证完。

定理2 如果条件Ⅰ和Ⅱ皆成立，则当关系式(3)成立时，对任意实数 α，边值问题(X)(A_1)(B_1)的解存在、唯一，若记为 $x(t,\alpha)$，则对任意实数 α_0，当 $\alpha\to\alpha_0$ 时，$x(t,\alpha)\to x(t,\alpha_0)$，$\dot{x}(t,\alpha)\to\dot{x}(t,\alpha_0)$ 于 $0\leqslant t<\infty$ 上一致地成立。

证明 由定理1、引理5及引理3，为证定理只须证明：对任一趋于 α_0 的序列 $\{\alpha_n\}$

成立极限式

(11) $$\lim_{n\to\infty}\dot{x}(0,a_n)=\dot{x}(0,a_0)$$

由 $\{a_n\}$ 的有界性和引理1知 $\{x(t,a_n)\}$ 于 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上一致有界，进而由引理4知 $\{\dot{x}(t,a_n)\}$ 于 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上一致有界，从而 $\{\dot{x}(0,a_n)\}$ 是有界的. 设 $\{\dot{x}(0,a_{n_j})\}$ 为其任一收敛子列，收敛于 β_0。考虑方程(X)满足条件 $x(0)=a_0,\dot{x}(0)=\beta_0$ 的解 $x(t)$。由解对初值的连续性及引理1知 $x(t)$ 于 $0\leqslant t<\infty$ 上有定义、有界，再由引理2及引理5见 $x(t)\equiv x(t,a_0)$ $(0\leqslant t<\infty)$，这就说明：有界序列 $\{\dot{x}(0,a_n)\}$ 的任一收敛子列必收敛于 $\dot{x}(0,a_0)$，这也相当于证明了极限式(11)。证完。

§4 边值问题(X)$(A_2)(B_1)$

定理3 当 $a>0$、$b=0$ 时，边值问题(X)$(A_2)(B_1)$有且只有零解；当 $a>0$、$b\neq 0$ 时，边值问题(X)$(A_2)(B_1)$有解的充要条件是关系式(3)成立。

证明 当 $a>0$、$b=0$ 时，显然；当 $a>0$、$b\neq 0$ 时，由引理2，只须证明方程(X)存在着满足条件 (A_2) 且于 $0\leqslant t<\infty$ 上有定义的有界解。记 $x(t,x_0)$ 为方程(X)满足条件 $x(0)=x_0$，$\dot{x}(0)=ax_0+b$ 的解，而 E 是这样的 x_0 构成的集合：相应的解 $x=x(t,x_0)$ 与解 $x=0$ 相交。无妨设 $b<0$，这时 E 非空、上方有界，因而有上确界，记为 α。由确界定义和解对初值的连续性易知 $x(t,\alpha)$ 即为所求之解，证完。

定理4 如果条件Ⅱ成立，则当关系式(3)成立时，对任意的实数 $a>0$ 和 b，边值问题(X)$(A_2)(B_1)$的解存在、唯一，若记为 $x(t,a,b)$，则对任意实数 $a_0>0$ 和 b_0，当 $(a,b)\to(a_0,b_0)$ 时，$x(t,a,b)\to x(t,a_0,b_0)$，$\dot{x}(t,a,b)\to\dot{x}(t,a_0,b_0)$ 于 $0\leqslant t<\infty$ 上一致地成立。

证明 由定理3、引理5及引理3见，只须证明：对任一组趋于 $a_0>0$ 和 b_0 的序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ $(a_n>0,\ n=1,2,\cdots)$ 成立极限式：

(12) $$\lim_{n\to\infty}x(0,a_n,b_n)=x(0,a_0,b_0).$$

由引理1知 $x(0,a_n,b_n)\cdot\dot{x}(0,a_n,b_n)\leqslant 0$，进而知 $|x(0,a_n,b_n)|\leqslant|b_n\cdot a_n^{-1}|$，因而 $\{x(0,a_n,b_n)\}$ 是有界的，设 $\{x(0,a_{n_j},b_{n_j})\}$ 为其任一收敛子列，收敛于 x_0，考虑方程(X)满足条件 $x(0)=x_0$，$\dot{x}(0)=a_0x_0+b_0$ 的解 $x(t)$，易知 $x(t)\equiv x(t,a_0,b_0)$ $(0\leqslant t<\infty)$，可见有界序列 $\{x(0,a_n,b_n)\}$ 的任一收敛子列必收敛于 $x(0,a_0,b_0)$，极限式(12)得证。证完。

定理5 当 $a=0$、$b=0$ 时，边值问题(X)$(A_2)(B_1)$有且只有零解；当 $a=0$、$b\neq 0$ 时，如果条件Ⅲ成立，则边值问题(X)$(A_2)(B_1)$有解的充要条件是关系式(3)成立。

证明 当 $a=b=0$ 时，显然；当 $a=0$、$b\neq 0$ 时，由引理2，只须证明方程(X)存在着满足条件 (A_2) 且于 $0\leqslant t<\infty$ 上有定义的有界解。记 $x(t,x_0)$ 为方程(X)满足条件 $x(0)=x_0$，$\dot{x}(0)=b$ 的解，而 E 是这样的 x_0 构成的集合：相应的解 $x=x(t,x_0)$ 与解 $x=0$ 相交。显然 E 非空，且由条件Ⅲ易知 E 还是有界的。从而如同定理1或3的推理，即得所要证明。证完。

定理6 如果条件Ⅱ和Ⅲ皆成立，则当关系式(3)成立时，对 $a=0$ 和任意实数 b，边值问题(X)$(A_2)(B_1)$的解存在、唯一，若记为 $x(t,b)$，则对任意实数 b_0，当 $b\to b_0$ 时 $x(t,b)\to x(t,b_0)$，$\dot{x}(t,b)\to\dot{x}(t,b_0)$ 于 $0\leqslant t<\infty$ 上一致地成立。

证明　由定理5、引理5及引理3见，为证定理只须证明：对任一趋于b_0的序列$\{b_n\}$成立极限式：

$$\lim_{n\to\infty} x(0,b_n)=x(0,b_0).$$

如同定理2或4的推理，只须证明$\{x(0,b_n)\}$是有界序列，而它则可用反证法由条件Ⅲ推出。证完。

§5　边值问题(X)(A)(B_2)

平行于定理1、3、5，容易推出如下定理：

定理7　当$a=0$时，边值问题(X)(A_1)(B_2)的解不存在；当$a\neq 0$时，如果条件Ⅰ也成立，则边值问题(X)(A_1)(B_2)有解的充要条件是关系式(2)成立。

定理8　当$a>0$、$b=0$时，边值问题(X)(A_2)(B_2)的解不存在；当$a>0$、$b\neq 0$时，边值问题(X)(A_2)(B_2)有解的充要条件是关系式(2)成立。

定理9　当$a=0$、$b=0$时，边值问题(X)(A_2)(B_2)的解不存在；当$a=0$、$b\neq 0$时，如果条件Ⅲ成立，则边值问题(X)(A_2)(B_2)有解的充要条件是关系式(2)成立。

参　考　文　献

[1]　Клоков, Ю. А., Метод решения предельной краевой задачи для обыкновеного дифференциального уравнения второго порядка, *Мат. сб.*, Т. 53(95), № 2, 1961, 219—232.

[2]　Hartman, P., Wintner, A., On the non-increasing solutions of $\ddot{y}=f(x,y,\dot{y})$, *Amer. J. Math.*, 73(1951), 390—404.

[3]　梁中超，一类二阶非线性微分方程解的渐近性状，数学进展，9(1966), 251—264.

[4]　梁中超，二阶非线性微分方程在无穷区间上的边值问题，应用数学学报，3(1981), 272—279.

[5]　Nagumo, M., Über die Differentialgleichung $y''=f(x,y,y')$, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*, 19 Ser 3, № 10(1937), 861—866.

The Boundary Value Problem for a Class of the Second-order Ordinary Differential Equations

Zhou Qinde and *Du Ruizhi*

Abstract

In this paper both the necessary and sufficient conditions for the existence of the solution of the boundary value problem

$$\ddot{x}=X(t,x,\dot{x}),\quad p\dot{x}(0)+qx(0)=r,\ x(\infty)=\text{const}.$$

and the continuous dependence of the solution on the boundary value are investigated.