第4卷 第3期
1984年7月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.3
July 1984

一类线性时变滞后微分方程组解的稳定性准则*

廖晓昕

（华中师范学院数学系）

本文对一类时变线性滞后微分方程，用不同于常见的方法[1-4]，直接根据系统本身系数之间的积分估计式，给出稳定性若干显式判别准则。这些结果条件的验证，较其它方法来得方便，也有一定适用范围。

考虑时变线性滞后微分方程组：

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}[a_{ij}(t)x_j(t)+b_{ij}(t)x_j(t-\tau)],\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{1}$$

设 $a_{ij}(t)$，$b_{ij}(t)$ 于 $t\geqslant t_0$ 连续，$0\leqslant\tau\leqslant\Delta=\mathrm{const}$。

考虑当 $t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0$，$x_i(t)=\varphi_i(t)$ $(i=1,2,\cdots n)$ 之解，其中 $\varphi_i(t)$ 是已知的连续函数。令

$$\tilde{P}_{ii}(t)=e^{\int_{t_0}^{t}a_{ii}(\xi)d\xi}+\int_{t_0-\tau}^{t_0}e^{\int_{t_1+\tau}^{t}a_{ii}(\xi)d\xi}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}(t_1+\tau)|\varphi_j(t_1)dt_1\quad(i=1,2,\cdots,n);$$

$$P_{ij}(t)=\begin{cases}\displaystyle\int_{t_0}^{t-\tau}e^{\int_{t_1+\tau}^{t}a_{ii}(\xi)d\xi}|b_{ij}(t_1+\tau)|dt_1, & \text{当 } i=j,i=1,2,\cdots,n;\\ \displaystyle\int_{t_0}^{t}e^{\int_{t_1}^{t}a_{ii}(\xi)d\xi}|a_{ij}(t_1)|dt_1+\int_{t_0}^{t-\tau}e^{\int_{t_1+\tau}^{t}a_{ii}(\xi)d\xi}|b_{ij}(t_1+\tau)|dt_1, & \text{当 } i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n.\end{cases}$$

定理 1 若(1)式满足下列条件：

1° $\tilde{P}_{ii}(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 有界；

2° $\sum_{j=1}^{n}P_{1j}(t)\leqslant u_1<1$，$P_{21}(t)u_1+\sum_{j=2}^{n}P_{2j}(t)\leqslant u_2<1,\cdots,\sum_{j=1}^{n-1}P_{nj}(t)\,u_j+P_{nn}(t)\leqslant u_n<1$，

(其中 u_i 为正常数，$i=1,2,\cdots,n$)

则(1)式平凡解一致稳定。

证明（大致步骤） 1° 过 $t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0$ $x_i(t)=\varphi_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 的解可表为：

$$x_i(t)=\varphi_i(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}a_{ii}(\xi)d\xi}+\int_{t_0}^{t}e^{\int_{t_1}^{t}a_{ii}(\xi)d\xi}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}a_{ij}(t_1)x_j(t_1)dt_1$$

*1981年10月25日收到。

$$+\int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_1}^{t} a_{ii}(\xi)d\xi}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t_1)x_j(t_1-\tau)dt_1=\varphi_i(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} a_{ii}(\xi)d\xi}$$

$$+\int_{t_0-\tau}^{t_0} e^{\int_{t_1+\tau}^{t} a_{ii}(\xi)d\xi}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t_1+\tau)\varphi_j(t_1)dt_1+\int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_1}^{t} a_{ii}(\xi)d\xi}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}(t_1)x_j(t_1)dt_1$$

$$+\int_{t_0}^{t-\tau} e^{\int_{t_1+\tau}^{t} a_{ii}(\xi)d\xi}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t_1+\tau)x_j(t_1)dt_1,\text{其中 } t\geq t_0 . \tag{2}$$

对(2)式用下列迭代：

$$x_i^{(m)}(t)=\varphi_i(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} a_{ii}(\xi)d\xi}+\int_{t_0-\tau}^{t_0} e^{\int_{t_1+\tau}^{t} a_{ii}(\xi)d\xi}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t_1+\tau)\varphi_j(t_1)dt_1$$

$$+\int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_1}^{t} a_{ii}(\xi)d\xi}\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}(t_1)x_j^{(m)}(t_1)dt_1+\int_{t_0}^{t-\tau} e^{\int_{t_1+\tau}^{t} a_{ii}(\xi)d\xi}\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}(t_1+\tau)x_j^{(m)}(t_1)dt_1$$

$$+\int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_1}^{t} a_{ii}(\xi)d\xi}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}(t_1)x_j^{(m-1)}(t_1)dt_1$$

$$+\int_{t_0}^{t-\tau} e^{\int_{t_1+\tau}^{t} a_{ii}(\xi)d\xi}\sum_{j=i}^{n} b_{ij}(t_1+\tau)x_j^{(m-1)}(t_1)dt_1,\quad i=1,2,\cdots,n;\ m=1,2\cdots. \tag{3}$$

令 $\max\limits_{1\leq i\leq n}|\varphi_i(t)|\leq C=\text{const.}$，$\tilde{p}_{ii}(t)\leq M=\text{const.}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，

$$\max_{1\leq i\leq n}\sup_{t\geq t_0}\left\{\sum_{j=1}^{n}P_{ij}(t)+1\right\}\leq K=\text{const.},\qquad u=\max_{1\leq i\leq n}u_i .$$

2° 取 $x_i^{(0)}(t)=\varphi_i(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} a_{ii}(\xi)d\xi}$ $(i=1,2,\cdots)$．用数学归纳法证明对一切自然数 m，有估计式：

$$|x_i^{(m+1)}(t)-x_i^{(m)}(t)|\leq u^m(K+1)^nCM,\quad m=1,2,\cdots;\ i=1,2,\cdots, \tag{4}$$

$$|x_i^{(m)}(t)|\leq\frac{CM}{1-u}(K+1)^n.\quad i=1,2,\cdots;\ m=1,2,\cdots, \tag{5}$$

故 $x_i^{(m)}(t)$ 是基本序列。所以(1)式的过始值 $t_0-\tau\leq t\leq t_0$ $x_i(t)=\varphi_i(t)$ 的解 $x_i(t)$ 也有估计式：$|x_i(t)|\leq\dfrac{CM}{1-u}(K+1)^n$。从而(1)式平凡解一致稳定。

推论 1　若1°　定理 1 条件1°成立；2°　$\sum\limits_{j=1}^{n}P_{ij}(t)\leq v<1$。则(1) 式平凡解一致稳定。

可以类似地证明：

定理 2　若(1)式满足：1°　$\tilde{p}_{ii}(t)$　$(i=1,2,\cdots,n)$ 有 界；2°　$\sum\limits_{j=1}^{n}\rho^{(i)}\leq\rho<1$；其中 $\max\limits_{1\leq j\leq n}P_{1j}(t)\leq\rho^{(1)}$，$P_{21}(t)\rho^{(1)}+\max\limits_{2\leq j\leq n}P_{2j}(t)\leq\rho^{(2)}$，$\cdots$，$\sum\limits_{j=1}^{n-1}P_{nj}(t)\rho^{(j)}+P_{nn}(t)\leq\rho^{(n)}$，其中 $\rho^{(i)}(i=1,2,\cdots n)$、$\rho$ 为常数，则(1)式平凡解一致稳定。

定理 3　若(1)式满足：1°　$\tilde{p}_{ii}(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 有界；2°　$\sum\limits_{j=1}^{n}P_{1j}^2(t)\leq u_1^2$，

$$2\left[(P_{2j}(t))^2u_1^2+\sum_{j=2}^{n}P_{2j}^2(t)\right]\leqslant u_2^2,\ \cdots,\ n\left[\sum_{j=1}^{n-1}P_{nj}^2(t)u_j^2+P_{nn}^2(t)\right]\leqslant u_n^2,\ \sum_{i=1}^{n}u_i^2=u^2<1,$$

则(1)式平凡解一致稳定。

证明 步骤大致与定理1同，利用 Cauchy 不等式和数学归纳法可证明迭代程序(3)有估计式：

$$\sum_{j=1}^{n}|x_j^{(m)}(t)-x_j^{(m-1)}(t)|^2\leqslant u^{2(m-1)}n[(K+1)^nCM]^2,$$

$$\sum_{j=1}^{n}|x_j^{(m)}(t)|^2\leqslant\left(\frac{1}{1-u}+1\right)\sqrt{n}(K+1)^nCM.$$

故知(1)式平凡解一致稳定。

定理4 若(1)式满足：1° $\tilde{P}_{ii}(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 有界；2° $P_{ij}(t)\leqslant P_{ij}=\text{const.}$，$\sum_{i=1}^{n}P_{ij}\leqslant v<1$，则(1)式平凡解一致稳定。

证明 大意：对(2)式用 Picard 迭代：

$$\begin{aligned}x_i^{(m)}(t)=&\varphi_i(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}a_{ii}(\xi)d\xi}+\int_{t_0-\tau}^{t_0}e^{\int_{t_1+\tau}^{t}a_{ii}(\xi)d\xi}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(t_1+\tau)\varphi_j(t_1)dt_1\\&+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\int_{t_0}^{t}e^{\int_{t_1}^{t}a_{ii}(\xi)d\xi}a_{ij}(t_1)x_j^{(m-1)}(t_1)dt_1\\&+\sum_{j=1}^{n}\int_{t_0}^{t-\tau}e^{\int_{t_1+\tau}^{t}a_{ii}(\xi)d\xi}b_{ij}(t_1+\tau)x_j^{(m-1)}(t_1)dt_1.\end{aligned}\tag{6}$$

取零次近似：$x_i^{(0)}(t)=\varphi_i(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}a_{ii}(\xi)d\xi}$

用数学归纳法可证对一切自然数m有估计式：

$$\sum_{i_m=1}^{n}|x_{i_m}^{(m)}(t)-x_{i_m}^{(m-1)}(t)|\leqslant\sum_{i_m=1}^{n}\sum_{i_{m-1}=1}^{n}\cdots\sum_{i_1=1}^{n}P_{i_mi_{m-1}}\cdots P_{i_2i_1}CR=nv^{m-1}CR.$$

所以
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|x_i^{(m)}(t)|&\leqslant\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i^{(s)}(t)-x_i^{(s-1)}(t)|+\sum_{i=1}^{n}|x_i^{(0)}(t)|\\&\leqslant\sum_{s=0}^{m-1}nCRV^s+nCM=\frac{nCR}{1-v}+nCM=C\left[\frac{nR}{1-v}+nM\right].\end{aligned}$$

余下与定理1的最后部分相同，可知(1)式平凡解一致稳定。

定理5 若(1)式满足：1° $\tilde{P}_{ii}(t)$有界$(i=1,2,\cdots n)$，$P_{ij}(t)\leqslant P_{ij}=\text{const.}$；

$$2^\circ\ \sum_{i,j=1}^{n}P_{ij}^2\leqslant w^2<1,$$

则(1)式平凡解一致稳定。

对(6)式可用数学归纳法证明有：

$$|x_i^{(m+1)}(t)-x_i^{(m)}(t)|^2\leqslant\left[\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_m=1}^{n}P_{ij_1}^2P_{j_1j_2}^2\cdots P_{ij_m}^2 nC^2R^2\right],$$

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i^{(m+1)}(t)-x_i^{(m)}(t)|^2\leqslant w^{2m}nC^2R^2.$$

余下与定理1最后证明步骤同，故知(1)式平凡解一致稳定。

注1　利用解对始值的连续依赖性，本文诸定理在 $t\geqslant t_0$ 成立的条件，可减弱为存在 $T>0$，当 $t\geqslant t_0+T$ 时，各定理条件分别成立。相应结论成立。

注2　因为迭代程序(3)收敛与方程及未知函数编号顺序有关，故上述定理1—3条件不满足，有时可通过适当调整方程及未知函数编号顺序(不改变稳定性质)，使条件满足，从而扩大应用范围。

参 考 文 献

[1] Burton, T. A., Stability theory for delay Equations, Funkcial Ekvac, 22-1(1979), 67-76.

[2] Date, R. A., precedure for determination of the exponential stability of certain differential difference equation, *Appl. Math.*, 26-3 (1978), 279-292.

[3] Driter, R. D., Exponential decay in some linear delay differential Equations, *Amer. Math. Manthly*, 85-9 (1978), 757-759.

[4] Lakshamikantham, V. & Leela, S., A technique in stability theory of delay differential equations, *Nonlinear Analysis*, 33(1979), 317-324.

[5] 廖晓昕，时变系统运动稳定性的迭代法，华中师院学报(自然科学版)，1981年第4期。

[6] 廖晓昕，超越函数 $f_n(t,e^{-\lambda\tau})\overset{\text{def}}{=}\mathrm{Det}(a_{ij}+b_{ij}e^{-\lambda\tau}-\delta_{ij}\lambda)_{n\times n}$ 零点全分布在复平面左半部的代数充分准则，科学通报，1982年第10期，577-580.

On the Criterion for the Stability of the Certain Class Linear Time Vary Delay Differential Equations

Liao Xiaoxin

(Huachung teachers College, Wuhan)

In this paper, We consider the differential-difference equations:

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}[a_{ij}(t)x_j(t)+b_{ij}(t)x_j(t-\tau)]\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{1}$$

where $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$ is continuous on $t\geqslant t_0$. $x_i(t)=\varphi_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ when $t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0$ and $\varphi_i(t)$ is continuous.

Let $\tilde{P}_{ii}(t)=e^{\int_{t_0}^{t}a_{ii}(\xi)d\xi}+\int_{t_0-\tau}^{t_0}e^{\int_{t_1+\tau}^{t}a_{ii}(\xi)d\xi}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}(t_1+\tau)|\varphi_j(t_1)dt_1, i=1,2,\cdots,n.$

$$P_{ij}(t)=\begin{cases}\int_{t_0}^{t-\tau}e^{\int_{t_1+\tau}^{t}a_{ii}(\xi)d\xi}|b_{ij}(t_1+\tau)|dt_1, & \text{when } i=j=1,2,\cdots,n;\\ \int_{t_0}^{t}e^{\int_{t_0}^{t}a_{ii}(\xi)d\xi}|a_{ij}(t_1)|dt_1+\int_{t_0}^{t-\tau}e^{\int_{t_1+\tau}^{t}a_{ii}(\xi)d\xi}|b_{ij}(t_1+\tau)|dt_1, & \text{when } i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n.\end{cases}$$

The following results are obtained:

Theorem 1—5 If (1) satisfies: 1° $\tilde{P}_{ii}(t)$ is obunded $(i=1,2,\cdots,n)$;

2° any one of following conditions:

$2^\circ(1)$ $\sum_{j=1}^{n}P_{1j}(t)\leqslant u_1<1,\ P_{21}(t)u_1+\sum_{j=2}^{n}P_{2j}(t)\leqslant u_2<1,$

$\cdots,\sum_{j=1}^{n-1}P_{nj}(t)u_j+P_{nn}(t)\leqslant u_n<1;$

$2^\circ(2)$ $\sum_{j=1}^{n}\rho^{(j)}\leqslant\rho<1$, where $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}P_{1j}(t)\leqslant\rho^{(1)},\ P_{21}(t)\rho^{(1)}+\max\limits_{2\leqslant j\leqslant n}P_{2j}(t)\leqslant\rho^{(2)},$

$\cdots,\sum_{j=1}^{n-1}P_{nj}(t)\rho^{(j)}+P_{nn}(t)\leqslant\rho^{(n)};$

$2^\circ(3)$ $\sum_{j=1}^{n}P_{1j}^2(t)\leqslant u_1^2,\ 2\Big[(P_{21}(t))^2u_1^2+\sum_{j=1}^{n}P_{2j}^2(t)\Big]\leqslant u_2^2,$

$\cdots,n\Big[\sum_{j=1}^{n-1}P_{nj}^2(t)u_j^2+P_{nn}^2(t)\Big]\leqslant u_n^2,\ \sum_{i=1}^{n}u_i^2=u^2<1;$

$2^\circ(4)$ $P_{ij}(t)\leqslant P_{ij}=\text{const.},\ \sum_{i=1}^{n}P_{ij}\leqslant v<1\ (j=1,2,\cdots,n);$

$2^\circ(5)$ $P_{ij}(t)\leqslant P_{ij}=\text{const.},\sum_{i,j=1}^{n}P_{ij}^2\leqslant w<1;$

then the trivial Solution of (1) is uniformly Stable.