第4卷 第3期
1984年7月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.3
July 1984

关于自反演公式的两个问题*

蔡传仁

（扬州师范学院）

§1. 一类自反演公式的多项式次数

徐利治和蒋茂森在文[1]中用“三角形程序”出色地构造出一类自反演公式，并提出一个猜想：就“非线性互反关系”

$$g_k = P_k(f_0, \cdots, f_k) \Longleftrightarrow f_k = P_k(g_0, \cdots, g_k) \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

而言，多元多项式 $P_k(x_0, \cdots, x_k)$ 的次数最小为 2^k。这里$\{f_0, f_1, \cdots, f_n \cdots\}$是在含有无穷多元素的交换环$\mathscr{R}$中任意给出的一个元素序列。

在本文中，我们规定$\mathscr{R}$是含有无穷多元素的交换环。在不加特殊说明时，我们还规定$\mathscr{R}$是含单位元1的整环。我们证明：对于这样一种环，“猜想”是成立的。

设$\varphi(x,y)$是定义在整个环$\mathscr{R}$上的一个二元单值函数，如果对于$\mathscr{R}$中任意一对元素a和b，$\varphi(x,y)$满足条件

$$\varphi(a,b)=c \Rightarrow \varphi(a,c)=b,$$

则称$\varphi(x,y)$为$\mathscr{R}$上的一个二元自反函数。根据文[1]，给定一个二元自反函数$\phi(x,y)$，规定$\mathscr{R}$上的函数

$$P_0(x_0)=x_0,$$

$$P_k(x_0, \cdots, x_k) = \phi(P_{k-1}(x_0, \cdots, x_{k-1}),\ P_{k-1}(x_1, \cdots, x_k)), \quad (k=1,2,\cdots) \tag{1}$$

就定义了一组自反演公式$P_k(x_0, \cdots, x_k)$，这里$k=0,1,2,\cdots$。这就是由“三角形程序”构造自反演公式的方法。

命题1 设$\varphi(x,y)$是$\mathscr{R}$上的一个多项式函数，如果存在$\mathscr{R}$上的多项式函数$\psi(x,y)$，使得对于$\mathscr{R}$中任意元素a和b，均有

$$\varphi(a,b)=c \Rightarrow \psi(a,c)=b \tag{2}$$

则

$$\varphi(x,y)=\varphi(x)+\lambda y,\quad \psi(x,y)=-\lambda^{-1}\varphi(x)+\lambda^{-1}y,$$

其中$\varphi(x)$是$\mathscr{R}$上的多项式函数，λ是$\mathscr{R}$中的一个可逆元素。

证明 由(2)式可知，$\varphi(x,y)$和$\psi(x,y)$关于y的次数均大于零，分别设为正整数n和m，则

$$\varphi(x,y)=\varphi_0(x)y^n+\varphi_1(x)y^{n-1}+\cdots+\varphi_n(x)$$

$$\psi(x,y)=\psi_0(x)y^m+\psi_1(x)y^{m-1}+\cdots+\psi_m(x)$$

*1981年7月1日收到。

其中 $\varphi_i(x)$ 和 $\psi_i(x)$ 都是$\mathscr{R}$上的多项式，并且 $\varphi_0(x)$ 和 $\psi_0(x)$ 都是非零多项式。因而

$$\psi(x,\varphi(x,y))=\psi_0(x)\varphi_0(x)^m y^{mn}+g(x,y)$$

这里 $g(x,y)$ 是 x 和 y 在$\mathscr{R}$上的多项式，并且关于 y 的次数小于 mn。

由(2)式可知，$\psi(x,\phi(x,y))$作为$\mathscr{R}$上的函数可以表示为

$$\psi(x,\varphi(x,y))=y.$$

在含有无穷多元素的交换整环中，如同在无限域中一样，零函数的多项式形式只能是零多项式，而多项式函数具有唯一确定的多项式形式。则有多项式恒等式

$$\psi_0(x)\phi_0(x)^m y^{mn}+g(x,y)\equiv y.$$

由于 $g(x,y)$ 关于 y 的次数小于 mn，因而

$$m=n=1,\quad \phi_0(x)=\lambda,\quad \psi_0(x)=\lambda^{-1},$$

其中 λ 是$\mathscr{R}$中的可逆元素。则

$$\varphi(x,y)=\varphi(x)+\lambda y,\quad \psi(x,y)=\psi(x)+\lambda^{-1}y.$$

由此

$$\psi(x,\varphi(x,y))=\psi(x)+\lambda^{-1}\varphi(x)+y\equiv y,\quad \psi(x)=-\lambda^{-1}\varphi(x).$$

当

$$\varphi(x,y)\equiv\psi(x,y)$$

时，则有

命题 2 对于由多项式表示的二元自反函数 $\varphi(x,y)$，必有

$$\varphi(x,y)=y,\text{ 或 }\varphi(x,y)=\varphi(x)-y.$$

命题 3 设 $P_k(x_0,x_1,\cdots,x_k)$ $(k=0,1,2,\cdots)$是由“三角形程序”获得的一组自反演公式，如果所有的 $P_k(x_0,x_1,\cdots,x_k)$都具有多项式形式，则存在一个自然数m，使得$P_k(x_0,x_1,\cdots,x_k)$的次数为 $m^k(k=0,1,2,\cdots)$。

证明 由 $P_1(x_0,x_1)$ 具有多项式形式可知，二元自反函数 $\varphi(x,y)$ 具有多项式形式，设其次数为m。当 $m=1$ 时，易知：对任意 k，$P_k(x_0,x_1,\cdots,x_k)$ 的次数均为 1。设$m\geqslant 2$，由命题 2 可知

$$\varphi(x,y)=\varphi(x)-y=rx^m+\varphi^*(x)-y$$

其中 $\varphi^*(x)$ 是 x 的次数小于m多项式，r 是$\mathscr{R}$中的非零元素。则

$$P_0(x_0)=x_0$$

$$P_1(x_0,x_1)=rx_0^m+\varphi^*(x_0)-x_1$$

$P_1(x_0,x_1)$ 的次数为m，我们用归纳法假设

$$P_{k-1}(x_0,x_1,\cdots,x_{k-1})=r^{\frac{m^{k-1}-1}{m-1}}x_0^{m^{k-1}}+\Phi_{k-1}(x_0,x_1,\cdots,x_{k-1})$$

其中 $\Phi_{k-1}(x_0,x_1,\cdots,x_{k-1})$的次数小于 m^{k-1}，则由(1)式可知

$$\begin{aligned}P_k(x_0,x_1,\cdots,x_k)&=\varphi(P_{k-1}(x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}),P_{k-1}(x_1,x_2,\cdots,x_k))\\&=rP_{k-1}(x_0,x_1,\cdots,x_{k-1})^m+\varphi^*(P_{k-1}(x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}))-P_{k-1}(x_1,x_2,\cdots,x_k)\\&=r^{\frac{m^k-1}{m-1}}x_0^{m^k}+\Phi_k(x_0,x_1,\cdots,x_k)\end{aligned}$$

其中 $\Phi_k(x_0,x_1,\cdots,x_k)$ 的次数小于m^k。由于$\mathscr{R}$上多项式函数具有唯一的多项式形式，因而 $P_k(x_0,x_1,\cdots,x_k)$ 的次数只能是 $m^k(k=0,1,2,\cdots)$。

当 $P_k(x_0,x_1,\cdots,x_k)$ 是非线性多项式时，由于 $m\geqslant 2$，因此，$P_k(x_0,x_1,\cdots,x_k)$ 的次数不小于 2^k，这就在这一特定情况下证明了“猜想”。

一般说来，当 $\mathscr{R}$ 是含无穷多元素的交换环时，命题3所表述的次数规律并不成立。例如，当 $\mathscr{R}$ 是幂零指数为 n 的幂零环时，$\mathscr{R}$ 上任意多项式函数都可表示为次数小于 n 的多项式。

§2. 关于“三角形程序”的一个推广

在环 $\mathscr{R}$ 上给定一个二元单值函数 $\varphi(x,y)$，也就在环 $\mathscr{R}$ 上确定了一个二元运算。我们把由 $\varphi(x,y)$ 确定的二元运算称为 ϕ-运算。这种运算关系可以用一个三角形来表示，如图1所示。三角形本身表示一个 φ-运算，图1表示 $\mathscr{R}$ 中元素 a 和 b 经由 ϕ-运算得到 c。如果对于一个 φ-运算，存在一个 ψ-运算，使得对于 $\mathscr{R}$ 中元素，均有

$$\varphi(a,b)=c\Longleftrightarrow\psi(a,c)=b,$$

则称这个 φ-运算为可逆运算，而把 ψ-运算称为 φ-运算的逆运算。容易验证，可逆运算具有唯一确定的逆运算，这使得我们可以把可逆运算 ϕ 的逆运算记为 φ^*。显然 φ^* 也是一个可逆运算，并且

$$(\varphi^*)^*=\varphi.$$

设 φ 为可逆运算，把图1绕三角形直角的平分线翻转，就得到了图2。在图2中，由于翻转，元素 b 和 c 交换了位置，三角形所表示的运算也不再是 φ，而是它的逆运算 φ^*。图2表示由元素 a 和 c 经由 φ^*-运算得到 b。由逆运算的唯一性可知，图形的翻转有意义。

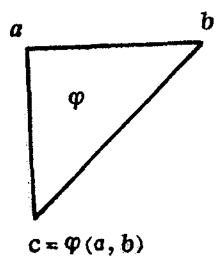

图1

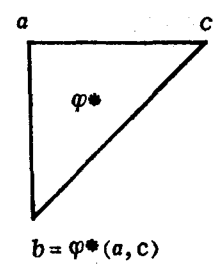

图2

设 Φ 是一个矩阵

$$\Phi=\begin{pmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \cdots & \cdots\\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \cdots & \\ \varphi_{31} & \cdots & \cdots & & \\ \cdots & \cdots & & & \\ \cdots & & & & \end{pmatrix}$$

其中矩阵元素 φ_{ij} 是 $\mathscr{R}$ 上的可逆运算。我们称矩阵 Φ 为运算矩阵。对于任意给定的一个运算矩阵 Φ，可以定义 $\mathscr{R}$ 上的一个序列变换：任意给定 $\mathscr{R}$ 上一个元素序列 $\{f_0,f_1,\cdots,f_n,\cdots\}$，记为 $\{f_{00},f_{01},\cdots,f_{0n},\cdots\}$。命

$$f_{ij}=\varphi_{i,j+1}(f_{i-1,j};\ f_{i-1,j+1}),\quad g_k=f_{k0},$$
$$(i=1,2,\cdots;\ j=0,1,2,\cdots;\ k=0,1,2\cdots) \tag{3}$$

则得到序列$\{g_0,g_1,\cdots,g_n,\cdots\}$。这个由运算矩阵$\Phi$所确定的序列变换可由图 3 来表示。

在图 3 中，每个小三角形表示一个运算，其意义如同图 1．由图 3 可知

$$g_k=P_k(f_0,f_1,\cdots,f_k)\quad(k=0,1,2,\cdots) \tag{4}$$

因此，这个序列变换也可由函数$P_k(x_0,x_1,\cdots,x_k)$ $(k=0,1,2,\cdots)$ 所定义。

由于每个ϕ_{ij}是可逆运算，这个序列变换存在唯一确定的逆变换。实际上，对图 3 作刚体翻转就得到图 4．翻转后，小三角形的位置发生了变化，每个小三角形所表示的运算是原运算的逆运算。

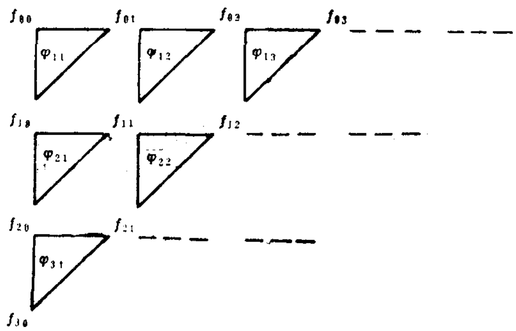

图 3

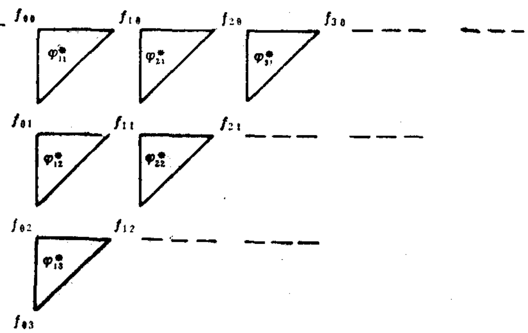

图 4

在图 4 中，第一行元素是$\{g_0,g_1,\cdots,g_n,\cdots\}$，第一列元素是$\{f_0,f_1,\cdots,f_n,\cdots\}$。显然，图 4 的序列变换由运算矩阵$\Phi^*$所确定，这里

$$\Phi^*=\begin{pmatrix}\varphi^*_{11} & \varphi^*_{21} & \varphi^*_{31} & \cdots & \cdots\\ \varphi^*_{12} & \varphi^*_{22} & \cdots & \cdots & \\ \varphi^*_{13} & \cdots & \cdots & & \\ \cdots & \cdots & & & \\ \cdots & & & & \end{pmatrix}$$

其中φ^*_{ij}是φ_{ij}的逆运算。在运算矩阵Φ的转置矩阵中，将每个元素变换为逆运算，就得到运算矩阵Φ^*，我们把这样得到的运算矩阵Φ^*称为运算矩阵Φ的翻转矩阵。

如果运算矩阵Φ满足条件：$\Phi^*=\Phi$，即$\varphi^*_{ij}=\varphi_{ij}$ $(i=1,2,\cdots;\ j=1,2,\cdots)$ 则称Φ为自反运算矩阵。

当Φ是自发运算矩阵时，Φ与Φ^*所确定的序列变换相同，也就是图 3 和图 4 表示相同的序列变换。在图 3 中，对任意给定的元素序列$\{f_0,f_1,\cdots,f_n,\cdots\}$，由(4)式，即

$$g_k=P_k(f_0,f_1,\cdots,f_k)\quad(k=0,1,2,\cdots)$$

将序列变换为$\{g_0,g_1,\cdots,g_n\cdots\}$。对自反运算矩阵而言，图 3 和图 4 具有相同的序列变换表达式，因而在图 4 中

$$f_k=P_k(g_0,g_1,\cdots,g_k)\quad(k=0,1,2)$$

这就得到了序列变换的自反演公式$P_k(x_0,x_1,\cdots,x_k)$ $(k=0,1,2,\cdots)$。

设$\varphi(x,y)$是$\mathscr{R}$上的一个二元自反函数，命

$$\varphi_{ij}(x,y)=\varphi(x,y)\quad(i=1,2,\cdots;\ j=1,2,\cdots)$$

则得到由“三角形程序”所给出的自反演公式，因而，这是“三角形程序”的一种推广。

本文作者衷心感谢导师黄应韶副教授和林子炳副教授的指教。

参考文献

[1] 徐利治、蒋茂森，获得互反公式的一类可逆图示程序及其应用，吉林大学自然科学学报，第4期（总27期），43-47，1980。

Two Problems on Self-reciprocal Formulas

Cai Chuanren (蔡传仁)

Abstract

In this paper, we discuss the degree of the polynomial $P_k(x_0, x_1, \cdots, x_k)$ for the "nonlinear reciprocal relations"

$$g_k=P_k(f_0,\cdots,f_k)\Longleftrightarrow f_k=P_k(g_0,\cdots,g_k)\quad(k=0,1,2,\cdots)$$

where $\{f_0, f_1, \cdots, f_n\cdots\}$ is any seguence in the commutative ring with infinitely many elements $\mathscr{R}$. We prove that, if $\mathscr{R}$ also is integral domain, then the degree of the polynomial $P_k(x_0,\cdots,x_k)$ which is obtained by the "triangular process" is at least 2^k as is conjectured in [1]. But the example shows that our result does not possess universalism.

Also, a generalization of "triangular process" is given. It will proffer a method in order to obtain a class of extensive self-reciprocal formulas.