第4卷 第3期
1984年7月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.3
July 1984

一类多项式级数的极值性质*

张培璇

（山东大学）

本文讨论了多项式级数的敛散性，指出满足一定条件的一类多项式级数的一个极值性质。

本文用 C_λ 表示焦点为点$(\pm 1, 0)$，长短半轴之和为$\frac{1}{\lambda}$的椭圆$(0<\lambda<1)$。本文中 $p_n(z)$ 和 $p_n^*(z)$ 都为 n 次多项式。

§1 一类多项式级数的极值性质

若函数 $f(\theta)$ 在每一个半开区间$\left[\frac{i-1}{n}\pi, \frac{i}{n}\pi\right)$, $i=1,2,\cdots n$ 中，有且仅有一个零点，则说 $f(\theta)$ 在$[0,\pi)$中有均匀分布的 n 个零点。

定理 1 若多项式列 $\{p_n^*(z)\}$ 满足下述条件，

① $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|p_n^*(x)|=1$，且有$|p_n^*(1)|=1$，$(n=1,2,\cdots)$。

② $p_n^*(\cos\theta)$ 在$[0,\pi)$有均匀分布的 n 个零点，$(n=1,2,\cdots)$。

又若复数列$\{a_n\}$使得

$$0<\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}<1; \tag{1}$$

则所有满足条件：

$$|p_n(x)|\leqslant 1, \ (-1\leqslant x\leqslant 1), n=1,2,\cdots \tag{2}$$

的多项式级数 $\Sigma a_n p_n(z)$ 中，级数 $\Sigma a_n p_n^*(z)$ 具有最小收敛域，且最小收敛域是一椭圆。

证明 令

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho, \tag{3}$$

于是由(1)式 $0<\rho<1$。我们首先证明，所有满足(2)式的多项式级数 $\Sigma a_n p_n(z)$ 在椭圆 C_ρ 内收敛。

由(2)式，应用 Bernstein定理[1]，对一切复数 z，有$|p_n(z)|\leqslant|w|^n$, $(n=1,2,\cdots)$.这里 $w=z+\sqrt{z^2-1}$，根号的选取使$|w|\geqslant 1$，由此注意到(3)式得

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n p_n(z)|}\leqslant\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}\,|w|=\rho|w|. \tag{4}$$

另外，当 z 为椭圆 C_ρ 内一点时，

$$|w|<\frac{1}{\rho}. \tag{5}$$

事实上，变换 $w=z+\sqrt{z^2-1}$ $(|w|\geqslant 1)$是 Жуковский 变换的反变换[2]，它把 C_ρ 的内部，映照到圆环 $1\leqslant|w|<\frac{1}{\rho}$里面去。于是由(4)式及(5)式得：当 z 为椭圆 C_ρ 内一点时，恒有 $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n p_n(z)|}<1$，所以满足(2)式的级数 $\Sigma a_n p_n(z)$ 在椭圆 C_ρ 内收敛。

*1982年7月27日收到。

我们只要再证明$\Sigma a_n p_n^*(z)$在椭园C_ρ外发散即可。

由假设条件②，有$p_n^*(\cos\theta_{i,n}^*)=0$，其中$\theta_{i,n}^*$适合：

$$\frac{i-1}{n}\pi \leqslant \theta_{i,n}^* < \frac{i}{n}, \ (i=1,2,\cdots,n, n=1,2,\cdots). \tag{6}$$

从而

$$p_n^*(z)=c_{0,n}^*\prod_{i=1}^{n}(z-\cos\theta_{i,n}^*), \ (n=1,2,\cdots). \tag{7}$$

由此得到，若z不取$[-1,1]$中的值，有

$$\sqrt[n]{|a_n p_n^*(z)|}=\sqrt[n]{|a_n c_{0,n}^*|}\, e^{\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\{\log|z-\cos\theta_{i,n}^*|\}\cdot\frac{\pi}{n}},$$

再由(6)式得，

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n p_n^*(z)|}=\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n c_{0,n}^*|}\cdot e^{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \log|z-\cos\theta|d\theta}. \tag{8}$$

下面分头计算$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n c_{0,n}^*|}$以及积分$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \log|z-\cos\theta|d\theta$。

由假设$|p_n^*(1)|=1$，故由(7)式，有

$$|c_{0,n}^*|\prod_{i=1}^{n}|1-\cos\theta_{i,n}^*|=1, \ (n=1,2,\cdots).$$

又由(6)式得到。

$$1\leqslant|c_{0,n}^*|\prod_{i=1}^{n}|1-\cos\frac{i}{n}\pi|=2|c_{0,n}^*|\prod_{i=1}^{n-1}|1-\cos\frac{i}{n}\pi|, \ (n=1,2,\cdots). \tag{9}$$

我们已知第二类 Чебышев 多项式$U_{n-1}(x)=2^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1}\left(x-\cos\frac{i}{n}\pi\right)$，$(n=1,2,\cdots)$。于是由(9)式，$U_{n-1}(1)\frac{|c_{0,n}^*|}{2^{n-2}}\geqslant 1$，又由$U_{n-1}(1)=n$[1]，从而有

$$|c_{0,n}^*|\geqslant\frac{2^{n-2}}{n}, \ (n=1,2,\cdots). \tag{10}$$

另一方面，由于$|p_n^*(x)|\leqslant 1, (-1\leqslant x\leqslant 1), n=1,2,\cdots$。由已知的结果[5],[6]知，$p_n^*(z)$的首项系数$c_{0,n}^*$满足

$$|c_{0,n}^*|\leqslant 2^{n-1}, (n=1,2,\cdots). \tag{11}$$

([6]中指出此结果，对复系数多项式也成立。）结合(10)式和(11)式有，$\lim\sqrt[n]{|c_{0,n}^*|}=2$，再由(3)式得

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n c_{0,n}^*|}=2\rho. \tag{12}$$

为计算积分$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \log|z-\cos\theta|d\theta$，做简单的变换得

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \log|z-\cos\theta|d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|F(e^{i\theta})|d\theta-\log 2,$$

其中，$F(\zeta)=\zeta^2-2z\zeta+1$。由 Jensen 公式[2]，有

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \log|z-\cos\theta|d\theta=\log|z+\sqrt{z^2-1}|-\log 2, \tag{13}$$

根号选取使$|z+\sqrt{z^2-1}|>1$。

将(12)式和(13)式代入(8)式，知当z不属于$[-1,1]$时，$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n p_n^*(z)|}=\rho|z+\sqrt{z^2-1}|$，根号选取同上，当$z$在椭圆$C_\rho$之外，显然有$|z+\sqrt{z^2-1}|>\frac{1}{\rho}$，于是$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n p_n^*(z)|}>1$。故级数在椭圆$C_\rho$外处处发散，定理1证毕。

容易证明，Legendre 多项式 $p_n(z)$[3]，第一、二类的 Чебышев 多项式 $T_n(z)$ 和 $\frac{1}{n+1}\cdot U_n(z)$[4]都满足定理 1 的假设条件①和②，于是由它们所组成的多项式级数都具有所述的极值性质。

若多项式级数在一闭曲线内收敛，在其外发散，则此闭曲线叫做它的收敛曲线。

由定理1的证明知，满足定理1假设条件的 $\Sigma a_n p_n^*(z)$，以椭圆 C_ρ 为收敛曲线，更一般地有

系　若 $p_n^*(\cos\theta)$ 在 $[0,\pi)$ 中有均匀分布的 n 个零点 $(n=1,2,\cdots)$。且 $\max\limits_{-1\leq x\leq 1}|p_n^*(x)|=|p_n^*(1)|$，$(n=1,2,\cdots)$。又若 $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n p_n^*(1)|}=\mu^*(0<\mu^*<1)$，则级数 $\Sigma a_n p_n^*(z)$ 以椭圆 c_μ^* 为收敛曲线。

§2　多项式级数的敛散性

对于多项式级数 $\Sigma a_n p_n(z)$，记多项式 $p_n(z)$ 的首项系数为 $c_{0,n}(n=1,2,\cdots)$。又记 $L_n=\max\limits_{-1\leq x\leq 1}|p_n(x)|(n=1,2,\cdots)$。我们称 $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|L_n}$ 为此级数的第一指标。$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n c_{0,n}|}$ 为此级数的第二指标。

我们把方程为 $d(z)=\frac{1}{r}(r>0)$ 的闭围道记为 D_r，其中 $d(z)$ 表示 z 到闭区间 $[-1,1]$ 的最短距离。显然 D_r 是由两个半圆和两段直线所围成(见图1)。

定理 2　若多项式级数 $\Sigma a_n p_n(z)$ 满足下述条件：

1）其第一指标为 μ，且 $0<\mu<1$；2）其第二指标为 ν，且 $\nu>0$；3）每一个 $p_n(z)$ 的零点都全落在 $[-1,1]$ 中，$(n=1,2,\cdots)$；

则有结论：1．此级数在椭圆 C_μ 内处处收敛；2．此级数在闭围道 D_ν 外处处发散；3．$\frac{\mu}{2}\leqslant\nu\leqslant 2\mu$。

证明略。

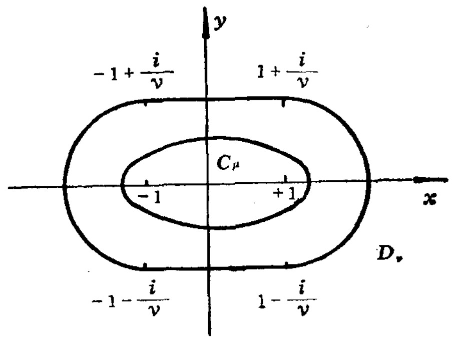

图 1

不同级数的收敛曲线，其形状可以是各种各样的，例如，对幂级数来说，它是圆。对于Legendre级数，它是椭圆，而对级数 $\Sigma a_n(z^2-1)^n$，它是双纽线。但由定理 2 我们确知，满足定理 2 条件的多项式级数，它的收敛曲线如果存在，一定位于椭园 C_μ 和闭围道 D_ν 之间(见图)。

在定理 2 中只要假设条件1)满足就有结论1.成立。只要假设条件2)和3)满足就有结论2.成立。故有下面的

系 1　若多项式级数 $\Sigma a_n p_n(z)$ 其第一指标为 $\mu(0<\mu<1)$，则此级数在椭圆 C_μ 内处处收敛。

系 2　若 $\Sigma a_n p_n(z)$ 的第二指标为 $\nu(\nu>0)$，且每一个 $p_n(z)$ 的零点都全落在 $[-1,1]$ 之中，则在闭围道 D_ν 之外处处发散。

下面我们要进一步证明系 1 中的 C_μ 和系 2 中的 D_ν 是不可改进的，讨论 Чебышев 多项式 $T_n(z)$[5]所组成的 Чебышев 级数 $\Sigma\mu^n T_n(z)$，$(0<\mu<1)$。显然它的第一指标为 μ，而又由于它满足定理 1 的系的条件，所以它以 C_μ 为其收敛曲线。于是在 C_μ 外处处发散，故系 1 中的 C_μ 是不可改进的。

我们讨论幂级数 $\Sigma\nu^n(z-z_0)^n$，$(-1\leqslant z_0\leqslant 1)$，$\nu>0$。易知它满足系 2 的条件。当 z_0 取遍

$[-1,1]$ 中所有的值时，相应地收敛圆 $|z-z_0|<\frac{1}{\nu}$ 的和集，恰为 D_ν 的内部区域，因此 D_ν 内的每一点都至少是上述幂级数集合中某一个的收敛点。故系 2 中的 D_ν 是不可改进的。

参考文献

[1] 巩恰罗夫，内插法与逼近论，p. 255，p. 155.
[2] 梯去马希，函数论.
[3] Markoff, A., *Mathmatische Annalen*, Vol. 27 (1886), p. 177—182.
[4] 纳唐松，函数构造论，中译本中册，p. 121.
[5] 纳唐松，函数构造论，中译本上册，p. 45.
[6] 张培璇，多项式上界，山东大学学报，1982年第二期.

An Extreme Property for a Kind of Polynomial Series

Zhang Peixuan

Abstract

In this paper, we discuss convergence and divergence for polynomial series and point out an extreme property for a kind of polynomial series.

The main results are as follows:

Theorem 1. If a polynomial sequence $\{p_n^*(z)\}$ satisfies the conditions:

1) $\max\limits_{-1\le x\le 1}|p_n^*(x)|=1$, and $|p_n^*(1)|=1$, $(n=1,2,3,\cdots)$

2) $p_n^*(\cos\theta)$ has n zeros of uniform distributions in $[0,\pi)$, $n=1,2,\cdots$.

i.e. $p_n^*(\cos\theta)$ has and only has one zero in $\left[\frac{i-1}{n}\pi,\frac{i}{n}\pi\right)$, $(i=1,2,\cdots n)$.

If complex sequence $\{a_n\}$ satisfies:

$$0<\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}<1.$$

Then in all polynomial series $\Sigma a_n p_n(z)$, satisfing condition:

$$|p_n(x)|\le 1,\ (-1\le x\le 1),\ (n=1,2,\cdots),$$

Series $\Sigma a_n p_n^*(z)$ has a minimal convergence region and the minimal convergence region is a ellipse.

Theorem 2. Suppose that polynomial series $\Sigma a_n p_n(z)$ satisfies following conditions:

1) $0<\mu=\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_nL_n|}<1$, where $L_n=\max\limits_{-1\le x\le 1}|p_n(x)|$;

2) $\nu=\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_nc_{0,n}|}>0$, where $c_{0,n}$ is coefficient of first term of polynomial $p_n(z)$;

3) for any n, all zeros of polynomial $p_n(z)$ lie in $[-1,1]$.

Then 1. the series is convergent everywhere inside the ellipse C_μ whose foci are ± 1 and the sum of whose seme-axes is $\frac{1}{\mu}$.

2. the series is divergent everywhere outside closed contour D_ν, where D_ν is made of two semi-circles and two segements of straight line (see figure 1 in this paper.)

3. $\frac{\mu}{2}\le\nu\le 2\mu$.