第4卷 第3期
1984年7月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.3
July 1984

对“高文”的一点看法*

叶章钊

(南京邮电学院)

数学研究与评论一九八一年第一期上，刊载了高益明的Jacobi和Gauss-Seidel迭代法收敛性的判定”一文[1]。(以下，简称此文为“高文”)我认为，“高文”定理5和其他一些命题有误。现说明如下。

给定线性代数方程组

(1) $$AX=C \qquad A=\{a_{ij}\}_{n\times n},\ X=\{x_i\}_{n\times 1},\ C=\{c_i\}_{n\times 1}$$

记$A=D-E-F$，其中D、$-E$、$-F$分别为矩阵A的对角、严格下三角、严格上三角部份。

$B=D^{-1}(E+F)$、$B_1=(D-E)^{-1}F$分别是方程组(1)对应的Jacobi迭代阵和Gauss-Seidel迭代阵。

又记 $B=\{b_{ij}\}$，$b_i=\sum\limits_{j=1}^{n}|b_{ij}|$，$\tilde{b}_j=\sum\limits_{i=1}^{n}|b_{ij}|$，$1\leqslant i,\ j\leqslant n$。

还有 $b_m=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} b_i$，$\tilde{b}_m=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\tilde{b}_j$。

“高文”中的定理5表述为：“设B是非正矩阵，且$\max\{b_m,\tilde{b}_m\}\geqslant 1$，那么，求解方程组(1)的Jacobi迭代和Gauss-Seidel迭代都发散”。

下面的例子指出，由这个“定理”的条件未必能断定Gauss-Seidel迭代发散。

例：

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\-\frac{1}{2}&-1&0\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

计算出

$$B=D^{-1}(E+F)=\begin{pmatrix}0&0&-1\\-1&0&\frac{-1}{2}\\\frac{-1}{2}&-1&0\end{pmatrix},$$

* 1983年9月12日收到。

容易验证：B 为非正矩阵，且 $b_m=\tilde{b}_m=1$。也就是对于该例，“高文”定理 5 的条件得到满足。但是，

$$B_1=(D-E)^{-1}F$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\\frac{1}{2}&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&\frac{-1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\\frac{1}{2}&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&\frac{-1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

显然，B_1 的谱半径 $\rho(B_1)=0$!

由此可见，对于该例 Gauss-Seidel 迭代并不发散，而是收敛的。并且由于 $\rho(B_1)=0$，其迭代过程还可能收敛得相当快!

众所周知，著名的 stein-Rosenberg 定理[2]指出：“当 B 为非负阵时，Jacobi 迭代与 Gauss-Seidel 迭代同时敛散”。但当 Jacobi 迭代阵 B 为非正阵时，上例说明，两迭代法未必同时敛散。

而“高文”在论证其定理 5 时，却把 Stein-Rosenberg 定理误套用到了 B 为非正阵的情形，以致于产生了缪误。

其实，“高文”中涉及到 B 为非正阵的其他命题也有类似的疏忽，不一一赘述了。

以上浅见，仅与高益明同志及其他读者商榷。

参考文献

[1] 高益明，Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法收敛性的判定，数学研究与评论1(1981)，113—118。
[2] 瓦格著，蒋尔雄等译，矩阵迭代分析，上海科技出版社，1966。