第4卷 第4期
1984年10月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.4
Oct. 1984

在有限部分具有四个奇点二次系统的无穷远奇点*

任永泰

（东北师范大学）

为了研究具有四个奇点二次系统的结构，本文研究了这类系统的无穷远奇点。

一般来说，二次系统的无穷远奇点是比较复杂的。但是在有限范围内具有四个奇点的二次系统，它的无穷远奇点则具有某些特殊性质。为了方便，下面以 E_2^4 表示这种系统。

一、系统 E_2^4 的方程

系统 E_2^4 经过仿射变换后，可将其中的任何三个奇点变成 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(0,1)$。因此总可以把系统 E_2^4 看成具有 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(0,1)$ 三个奇点。所以它的方程可以写成

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1x + c_1y - a_1x^2 + b_1xy - c_1y^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2x + c_2y - a_2x^2 + b_2xy - c_2y^2. \end{cases} \tag{1}$$

可以看出方程(1)有三个奇点：$O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(0,1)$。要使方程(1)存在第四个奇点，还需要系数间满足一定的关系。

二、系统 E_2^4 无穷远奇点的研究

下面分两种情况：1. $c_1\neq0$ 或 $a_2\neq0$；2. $c_1=0$，$a_2=0$，通过方程(1)来研究系统 E_2^4 的无穷远奇点。

1. $c_1\neq0$ 或 $a_2\neq0$。如 $c_1\neq0$，通过代换 $dt=c_1d\tau$，当 $a_2\neq0$ 时，通过代换 $x=\bar{y}$，$y=\bar{x}$，$dt=a_2d\tau$。均可使方程(1)化成形如

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = ax + y - ax^2 + bxy - y^2 \\ \dfrac{dy}{d\tau} = lx + my - lx^2 + nxy - my^2 \end{cases} \tag{2}$$

的方程组。

如果方程组(2)存在四个奇点，则第四奇点坐标为 $C\left(\dfrac{(am-l)(am-l+bm-n)}{(am-l)^2-(bm-n)(an-bl)},\ \dfrac{(am-l)(am-l+an-bl)}{(am-l)^2-(bm-n)(an-bl)}\right)$，方程组(2)的系数关系必有：$(am-l)^2-(bm-n)(an-bl)$

*1981年9月3日收到。

$\neq 0$，$am-l\neq 0$，$am-l+bm-n\neq 0$，$am-l+an-bl\neq 0$. 否则方程组(2)有三个奇点或有无穷多个奇点.

为了研究方程组(2)的无穷远奇点，作 Poincarè 变换

$$x=\frac{1}{z},\quad y=\frac{u}{z},\quad d\tau=\frac{dt}{z},$$

则得

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt}&=z(a-bu+u^2-az-zu)=P(z,u)\\ \frac{du}{dt}&=-l+(n+a)u-(m+b)u^2+u^3+z[l+(m-a)u-u^2]=Q(z,u).\end{aligned}\tag{3}$$

于是无穷远奇点的方程为

$$f(u)=u^3-(m+b)u^2+(n+a)u-l=0.\tag{4}$$

通过方程组(3)的一次近似来判断它的奇点类型，如奇点坐标为$(0,u_0)$，则有

$$q_{(0,u_0)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial P}{\partial z} & \frac{\partial P}{\partial u}\\ \frac{\partial Q}{\partial z} & \frac{\partial Q}{\partial u}\end{vmatrix}_{(0,u_0)}=\begin{vmatrix}u_0^2-bu_0+a & 0\\ \Delta & f'(u_0)\end{vmatrix}=(u_0^2-bu_0+a)f'(u_0).\tag{5}$$

引理 1 如方程组(2)属于E_2^4，$(0,u_0)$为其无穷远奇点坐标时，则必有(证明从略)

$$u_0^2-bu_0+a\neq 0.$$

引理 1 说明，属于系统E_2^4的方程组(1)，当$c_1\neq 0$或$a_2\neq 0$时，化成方程组(2)后，应用方程组(3)的一次近似判断无穷远奇点$(0,u_0)$的类型时，有

$$q_{(0,u_0)}=(u_0^2-bu_0+a)f'(u_0),$$

其中因子$u_0^2-bu_0+a$不为零，因此判断初等奇点的q值是否为零取决于$f'(u_0)$是否为零.

2. $c_1=0$，$a_2=0$. 此时方程组(1)为

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=a_1x+b_1xy-a_1x^2,\\ \frac{dy}{dt}&=c_2y+b_2xy-c_2y^2.\end{aligned}\tag{6}$$

方程组(6)的第四奇点坐标为$C\left(\frac{c_2(a_1-b_1)}{b_1b_2-a_1c_2},\ \frac{-a_1(b_2+c_2)}{b_1b_2-a_1c_2}\right)$. 因此，方程组(6)属于$E_2^4$，系数间必有关系：$b_1b_2-a_1c_2\neq 0$，$a_1\neq 0$，$c_2\neq 0$，$a_1-b_1\neq 0$，$b_2+c_2\neq 0$.

引理 2 如方程组(6)属于E_2^4，则有(证明从略)：

i) 当$(a_1+b_2)(b_1+c_2)\neq 0$时，有三个无穷远奇点，且均为初等奇点；

ii) 当$a_1+b_2=0$或$b_1+c_2=0$时，有两个无穷远奇点，其中一个是初等奇点，另一个是鞍结点.

三、几个结论

定理 1 系统E_2^4如有三个无穷远奇点，则必均为初等奇点(即为鞍点或结点).

证 由上面对方程组(1)的讨论知道

i）当 $c_1=0$，$a_2=0$ 时，由引理 2 知道定理的结论成立。

ii）当 $c_1\neq0$ 或 $a_2\neq0$ 时，方程组(1)化成方程组(2)后，三个无穷远奇点 $P_i(0,u_i)$ $(i=1,2,3)$，通过方程组(3)的一次近似判断奇点类型，因

$$q_{(0,u_i)}=(u_i^2-bu_i+a)f'(u_i),\ i=1,2,3.$$

由引理 1 知 $u_i^2-bu_i+a\neq0$ $(i=1,2,3)$，又因 $f(u)$ 是 u 的三次多项式，且有三个实根 $u=u_i(i=1,2,3)$，必有

$$f'(u_i)\neq0,\qquad i=1,2,3.$$

所以 $q_{(0,u_i)}=(u_i^2-bu_i+a)f'(u_i)\neq0$ $(i=1,2,3)$，于是方程组(1)的三个无穷远奇点均为初等奇点。

定理 2　系统 E_2^4 如有两个无穷远奇点，则必有一个是初等奇点，另一个是鞍结点。

证　对于系统 E_2^4 的方程组(1)：

i）当 $c_1\neq0$ 或 $a_2\neq0$ 时，方程组(1)化成方程组(2)后，如有两个无穷远奇点，其坐标为

$$P_1(0,u_1),\qquad P_2(0,u_2).$$

通过方程组(3)的一次近似判断奇点类型时，因

$$q_{(0,u_i)}=(u_i^2-bu_i+a)f'(u_i)\qquad i=1,2,$$

由引理 1 知 $u_i^2-bu_i+a\neq0$ $(i=1,2)$，另外 $f(u)$ 是 u 的三次多项式，且有两个实根 $u=u_i$ $(i=1,2)$，由三次多项式的性质知道，它的导数 $f'(u)$ 必在一个点上为零，而在另一点上不为零，如

$$f'(u_1)\neq0,\qquad f'(u_2)=0,$$

则有

$$q_{(0,u_1)}\neq0,\qquad q_{(0,u_2)}=0,$$

于是可知无穷远奇点 $P_1(0,u_1)$ 为初等奇点，而 $P_2(0,u_2)$ 为高次奇点。通过以下讨论可以断定它是鞍结点。

为了讨论方程组(2)的无穷远奇点，在代换后所得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dt}=z(u^2-bu+a-az-zu)\\[2mm]\dfrac{du}{dt}=u^3-(m+b)u^2+(n+a)u-l+z[l+(m-a)u-u^2]\end{cases}\tag{3}$$

中，令 $f(u)=u^3-(m+b)u^2+(n+a)u-l$，为了讨论无穷远奇点 $P_2(0,u_2)$ 的类型，作变换

$$z=\bar{z},\qquad u=\bar{u}+u_2,$$

方程组(3)成为

$$\begin{aligned}&\frac{d\bar{z}}{dt}=(u_2^2-bu_2+a)\bar{z}+\bar{z}[\bar{u}^2-(2u_2+b)\bar{u}-(a+u_2)\bar{z}\bar{u}]\\&\frac{d\bar{u}}{dt}=[l+(m-a)u_2-u_2^2]\bar{z}+f(\bar{u}+u_2)+\bar{z}[(m-a-2u_2)\bar{u}-\bar{u}^2],\end{aligned}\tag{7}$$

令 $\bar{a}=u_2^2-bu_2+a$，$\bar{b}=l+(m-a)u_2-u_2^2$，由引理1知 $u_2^2-bu_2+a\neq 0$，对方程组(7)作代换

$$\bar{z}=x,\qquad \bar{u}=\frac{1}{\bar{a}}(\bar{b}x-y),$$

则得

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=\bar{a}x+x\left[\left(\frac{\bar{b}x-y}{\bar{a}}\right)^2-(2u_2+b)\frac{\bar{b}x-y}{\bar{a}}-(a+u_2)x\frac{\bar{b}x-y}{\bar{a}}\right]=U(x,y)\\&\frac{dy}{dt}=f\left(\frac{\bar{b}x-y}{\bar{a}}+u_2\right)+x\left[(m-a-2u_2)\frac{\bar{b}x-y}{\bar{a}}-\left(\frac{\bar{b}x-y}{\bar{a}}\right)^2\right]=V(x,y),\end{aligned}\tag{8}$$

由方程(8)可知奇点 $P_2(0,u_2)$ 为 Ляпунов 奇点，为了进一步判断它的类型，根据[1]，令

$$U(x,y)=0,$$

解出 x，得 $x=0$，再代入 $V(x,y)$ 中去，得

$$\begin{aligned}V(0,y)=f\left(-\frac{y}{\bar{a}}+u_2\right)=f(u_2)+f'(u_2)\left(-\frac{y}{\bar{a}}\right)+\frac{f''(u_2)}{2!}\left(-\frac{y}{\bar{a}}\right)^2\\+\frac{f'''(u_2)}{3!}\left(-\frac{y}{\bar{a}}\right)^3.\end{aligned}\tag{9}$$

因 $P_2(0,u_2)$ 为无穷远奇点有 $f(u_2)=0$，且有 $f'(u_2)=0$，但 $f''(u_2)\neq 0$，于是

$$V(0,y)=\frac{f''(u_2)}{2!(\bar{a})^2}y^2-\frac{f'''(u_2)}{3!(\bar{a})^3}y^3,$$

因 $V(0,y)$ 的最低次数为偶数，于是 $P_2(0,u_2)$ 为鞍结点。

ii) 当 $c_1=0$ 及 $a_2=0$ 时，由引理2知，如方程组(1)有两个无穷远奇点时，其中一个是初等奇点，另一个是高次奇点。与情况i)的讨论相同，可以证明此高次奇点为鞍结点。

定理3 系统 E_2^4 只有一个无穷远奇点时，必为初等奇点。

证 系统 E_2^4 的方程组(1)，因为 E_2^4 只有一个无穷远奇点，必为 $c_1\neq 0$ 或 $a_2\neq 0$（因为如 $c_1=a_2=0$ 时，系统至少有两个无穷远奇点）。

此时在方程组(3)中讨论。设此无穷远奇点坐标为 $P_0(0,u_0)$，与定理2的讨论相同，知 $P_0(0,u_0)$ 为 Ляпунов 奇点，代入(9)式中，得

$$V(0,y)=f\left(\frac{-y}{\bar{a}}+u_0\right)=f(u_0)-\frac{f'(u_0)}{\bar{a}}y+\frac{f''(u_0)}{2!\bar{a}^2}y^2-\frac{f'''(u_0)}{3!\bar{a}^3}y^3.$$

因 $P_0(0,u_0)$ 是方程组(1)的唯一无穷远奇点，则 $u=u_0$ 只能是无穷远奇点方程 $f(u)=0$ 的单根或三重根。下面分两种情况讨论：

(1) 当 $u=u_0$ 为单根时，则 $f(u_0)=0$ 但 $f'(u_0)\neq 0$，于是

$$V(0,y)=-\frac{f'(u_0)}{\bar{a}}y+\frac{f''(u_0)}{2!\bar{a}^2}y^2-\frac{f'''(u_0)}{3!\bar{a}^3}y^3.$$

（2）当 $u=u_0$ 为三重根时，则有 $f(u_0)=f'(u_0)=f''(u_0)=0$，但 $f'''(u_0)\neq 0$，于是

$$V(0,y)=-\frac{f'''(u_0)}{3!\bar{a}^3}y^3.$$

在上面的两种情况中，y 的最低次数均为奇数，因此 $P_0(0,u_0)$ 必为鞍点或结点。

定义　鞍结点在无穷远直线上的存在形式有如下两种，鞍结点的对径点如图 1 形式，称为第一型鞍结点；对径点如图 2 形式称为第二型鞍结点。

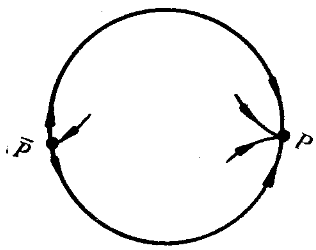

图 1

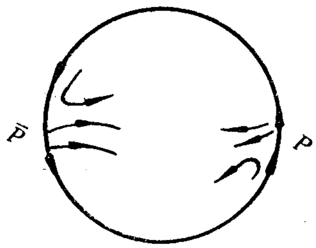

图 2

定理 4　系统 E_2^4 的无穷远奇点如为高次奇点，则必为第二型鞍结点。

证　设系统的无穷远点坐标的方程为

$$f(u)=0. \tag{10}$$

如果三次方程(10)的判别式为 D。($D>0$ 有单实根，$D=0$ 有二实根，$D<0$ 有三个实根。)

由定理 1，2，3 中知道，如果系统的无穷远奇点中有高次奇点，则此系统必有两个无穷远奇点。此时方程 $f(u)=0$ 必有二实根，于是其判别式必有 $D=0$。

我们对系统作微小扰动，在无穷远直线上的轨线方向不变情况下，使得判别式 $D>0$，此时在无穷远直线上的高次奇点消失，只剩下一个初等奇点。由定理 2 知道消失前的高次奇点必为鞍结点，如果它是第一型鞍结点，当它消失后无穷远直线上轨线的方向必出现矛盾。所以此鞍结点为第二型的。

定理 5　系统 E_2^4 中的三个奇点是鞍点时，则此系统必有三个无穷远奇点，且均为结点。

证　系统 E_2^4 的三个奇点是鞍点，，由[2]知此系统的四个奇点构成凹四边形，另外的奇点指数必为 +1。因此有限范围内奇点指数和为 − 2。要使 Poincarè 射影平面上奇点指数和为 +1，则无穷远奇点指数和必为 +3方可。由定理 1，2，3 可知，系统必存在三个无穷远奇点，并且均为结点。

定理 6　系统 E_2^4 的有限部分奇点构成凹四边形时，则其无穷远奇点有下述三种可能（证明从略）：

（1）系统有三个无穷远奇点时，必为两个鞍点一个结点；

（2）系统有两个无穷远奇点时，必为一个鞍点一个鞍结点；

（3）系统只有一个无穷远奇点时，必为鞍点。

定理7 系统 E_2^4 的有限部分奇点构成凸四边形时，则其无穷远奇点有下述三种可能（证明从略）：

（1）系统有三个无穷远奇点时，必为两个结点一个鞍点；

（2）系统有两个无穷远奇点时，必为一个结点一个鞍结点；

（3）系统有一个无穷远奇点时，必为结点。

参考文献

［1］ 秦元勋，微分方程所定义的积分曲线，第四章第二节，科学出版社。

［2］ 董金柱，方程组 $\frac{dx}{dt}=\sum\limits_{0\leq i+k\leq 2}a_{ik}x^iy^k$，$\frac{dy}{dt}=\sum\limits_{0\leq i+k\leq 2}b_{ik}x^iy^k$ 的奇点指数分布与极限环线的位置，数学学报 8(1958)，№2.

Infinite Singular Point of Quadratic System with Four Singular Points at Finity

Ren Yuongtai

(North-East Normal University)

Abstract

Suppose that E_2^4 is quadratic system which possesses four singular points at finity. We study singular points of E_2^4 at infinity. The results are as follows.

1. If E_2^4 possesses three singular points at infinity, then they are all elementary singular points.

2. If E_2^4 possesses two singular points at infinity, then one of them is elementary singular point, another is higher singular points.

3. If E_2^4 possess higher singular point at infinity, then it's saddle-nodel of second form;

4. If E_2^4 possess one singular point at infinity, then it's elementary singular point.