第4卷 第4期
1984年10月

数学研究与评论
JOURLN AOF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.4
Oct. 1984

四阶循环方程式的一般解公式及其在偏微分方程中的应用*

陈银通　　李立鹏　　余长安

（武汉大学）（华中工学院）（武汉大学）

众所周知，循环方程式(递推式)的一般解求助于解相应的特征方程。但高次特征方程的根一般得不到明显的表达式。1981年[2]中得到了一类三项齐次递推式的一般解的明显表达式。

本文采用另一种方法，导得四阶循环方程式

$$\text{(A)}\quad \begin{cases} a_{n+4}=a_3a_{n+3}+a_2a_{n+2}+a_1a_{n+1}+a_0a_n \\ a_i\quad =c_i\quad (i=0,1,2,3;\ c_i\ \text{是已知常数}) \end{cases}$$

一般解的明显表达式及其在构造一类四阶线性偏微分方程组解的表达式的应用。

主　要　结　果

定理1　问题(A)的一般解的表达式可表示为

$$a_{n+4}=\sum_{i=0}^{3}\Big\{\sum_{j=0}^{i}\Big\{\sum_{b_0=0}^{[\frac{n-j}{4}]}\ \sum_{b_1=0}^{[\frac{n-j-4b_0}{3}]}\ \sum_{b_2=0}^{[\frac{n-j-3b_1}{2}]}\frac{(b_0+b_1+b_2+b_3)!}{b_0!\,b_1!\,b_2!\,b_3!}\Big\{\prod_{m=0}(a_{3-m}^{b_{3-m}})\Big\}\Big\}a_{i-j}\Big\}c_i.$$

$$(\text{其中}\ b_3=n-j-4b_0-3b_1-2b_2)。\tag{1}$$

设 $A(z)$、$B(z)$、$C(z)$ 是 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_N)$ 在原点邻域中的解析函数矩阵，D 是与[3]中意义相同的微分算子矩阵，而且 $A(z)$、$B(z)$、$C(z)$ 和 D 是在[3]意义下互相可易的；$\varphi_i(z)$，$a_j(z)\,(j=0,1,\cdots)$ 是在原点邻域内的解析列向量。

定理2　在上面假设下，问题

$$\text{(B)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^4u}{\partial t^4}-A(z)\dfrac{\partial^3u}{\partial t^3}-B(z)\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}-C(z)\dfrac{\partial u}{\partial t}=Du+\displaystyle\sum_{j=0}^{m}a_j(z)t^j, & (2) \\ \left.\dfrac{\partial^iu}{\partial t^i}\right|_{t=0}=\varphi_i(z)\quad (i=0,1,2,3) & (3) \end{cases}$$

(m为无限时，级数在原点邻域内一致收敛)在原点邻域中的唯一解析解可表示为

$$u(t,z)=\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{k!}\varphi_k(z)t^k+\sum_{n=4}^{\infty}\Big\{\Big(\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{i}\ \sum_{b_0=0}^{[\frac{n-j-4}{4}]}\ \sum_{b_1=0}^{[\frac{n-j-4-4b_0}{3}]}\ \sum_{b_2=0}^{[\frac{n-j-4-3b_1}{2}]}$$

---

*本文曾于1983年武汉大学校庆70周年学术报告会上宣读过。1984年3月19日收到。

$$\cdot C_{b_0+b_1}^{b_0} C_{b_0+b_1+b_2}^{b_0+b_1} C_{n-j-4-3b_0-2b_1-b_2}^{b_0+b_1+b_2} A^{n-j-4-4b_0-3b_1-2b_2} B^{b_2} C^{b_1} D^{b_0} \Big) \beta_{i-j} \varphi_i \Big\} \frac{1}{n!} t^n$$

$$+ \sum_{n=4}^{\infty} \Big\{ \sum_{j=0}^{n-4} \Big(\sum_{b_0=0}^{\left[\frac{n-j-4}{4}\right]} \sum_{b_1=0}^{\left[\frac{n-j-4-4b_0}{3}\right]} \sum_{b_2=0}^{\left[\frac{n-j-4-3b_1}{2}\right]} C_{b_0+b_1}^{b_0}$$

$$\cdot C_{b_0+b_1+b_2}^{b_0+b_1} C_{n-j-4-3b_0-2b_1-b_2}^{b_0+b_1+b_2} A^{n-j-4-4b_0-3b_1-2b_2} B^{b_2} C^{b_1} D^{b_0} \Big) j!\, a_j(z) \Big\} \frac{1}{n!} t^n$$

$$(\beta_3、\beta_2、\beta_1、\beta_0 \text{ 分别表示 } A、B、C \text{ 和 } D)。 \tag{4}$$

我们有

引理　循环方程式

$$\begin{cases} a_{n+4}^{(i)} = \alpha_3 a_{n+3}^{(i)} + \alpha_2 a_{n+2}^{(i)} + \alpha_1 a_{n+1}^{(i)} + \alpha_0 a_n \\ a_i^{(i)} = c_i;\ a_l^{(i)} = 0,\ \text{当 } i \neq l \text{ 时。} \end{cases}$$

对于每一个 i，其对应一般解的表达式可表示为

$$a_{n+4}^{(i)} = \sum_{j=0}^{i} \Big\{ \sum_{b_0=0}^{\left[\frac{n-j}{4}\right]} \sum_{b_1=0}^{\left[\frac{n-j-4b_0}{3}\right]} \sum_{b_2=0}^{\left[\frac{n-j-3b_1}{2}\right]} \frac{(b_0+b_1+b_2+b_3)!}{b_0!\, b_1!\, b_2!\, b_3!} \Big(\prod_{m=0}^{3} (\alpha_{3-m}^{b_{3-m}}) \Big) \alpha_{i-j} \Big\} c_i$$

$$(i = 0,1,2,3;\ n = 0,1,\cdots)。 \tag{5}$$

其中 $b_3 = n-j-4b_0-3b_1-2b_2$，（5）中求和号的上方[x]表示 x 的整数部分。易知，由引理中$i=0,1,2,3$时分别所对应的解（5）的和就是问题(A)的一般解。

定理2的证明，主要是设问题(B)中对应的齐次方程满足初始条件(3)的解为$u(t,z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z) t^i$，代入齐次方程导得

$$\begin{cases} a'_{n+4} = A(z) a'_{n+3} + B(z) a'_{n+2} + C(z) a'_{n+1} + D a'_n \\ a'_i = \varphi_i(z) \quad (i = 0,1,2,3) \end{cases}$$

其中 $i!\, b_i(z) = a'_i$；注意到 A、B、C、D 的互相可易性，并应用定理 1 和 $b_i(z)$、a'_i 的关系式，即可得到(B)中齐次方程具有初始条件（3）的解表达式为（4）式中右端前面两部分表达式之和；而(B)中当 $\varphi_i(z) \equiv 0$ 时的解析解可表示为（4）中右端的最后一部分表达式；由上述的两个问题的解相结合，便得到定理2。

参　考　文　献

[1] 柯召，魏万迪，组合论（上册），科学出版社，1981年。

[2] 屠规彰，三项齐次递推式的一般解公式，数学年刊，Vol. 2, No. 4(1981).

[3] 陈银通，关于二阶线性偏微分方程组柯西问题解析解，数学杂志，Vol. 1, No. 2(1981).

[4] 陈银通，余长安，三项齐次递推式的一般解公式在偏微分方程中的应用，投《应用数学学报》。

[5] B. N. 斯米尔诺夫，高等数学教程，第四卷二分册（谷超豪等译）。