第4卷 第4期
1984年10月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.4
Oct. 1984

关于P_-函数某些性质的探讨*

夏少刚

（辽宁财经学院 基础部）

由于解非线性问题的需要，人们对n维非线性映像中的P_-函数已有相当的研究。特别是Moré和Rheinboldt对P_-函数及其相关类的定义、性质和相互间的关系给予了较详细的描述[1,4]。本文是在[1]的基础上对P_-函数及其弱形式P_{0-}函数某些性质的进一步探讨，得到判断P_-函数的充要条件（定理1）等若干新结果。它们是[1]的必要补充和深入。

本文是在笔者的老师冯果忱副教授指导下完成的，谨致谢意。

现将主要结果叙述如下：

定理1 映像F：$D\subset R^n\to R^n$是P_-函数的充要条件是F和它的所有子函数均内射，且它们的逆为P_{0-}函数。

结合定理1和[1]中某些结果，可得如下诸推论。

推论1 映像F：$D\subset R^n\to R^n$是P_-函数的充要条件是对任何对角矩阵$\Delta_n=\mathrm{diag}(d_1, d_2,\cdots,d_n)$，$d_i\geqslant 0$，$i\in N$，$F+\Delta_n$和它的所有子函数均是内射的。

推论2 设F：$Q\subset R^n\to R^n$是开矩形Q上F_-可微的P_{0-}函数。且对每一$x\in Q$，$F'(x)$及其主子矩阵均非奇异，则F为P_-函数。

推论3 设F：$D\subset R^n\to R^n$是P_{0-}函数，它及其所有子函数均内射，并且假定F之每一子函数的逆均等于F^{-1}的相应子函数，则F为P_-函数。

我们知道，在可微的情况下，函数$F(x)$和它的Jacobi矩阵$F'(x)$有着十分密切的联系，[1]中指出：如果$F'(x)$是P_-矩阵，（有关P_-矩阵的定义、性质详见[2,3]）则F是P_-函数。但这个定理的逆是不真的。例如

$$F: R^2\to R^2,\ F(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}x_1^3-x_2\\ x_1+x_2^3\end{pmatrix}$$

是R^2中F_-可微的P_-函数，但$F'(0)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，却不是$P_-$函数，虽然它是非奇异的。

以下几个定理是对这一问题的深入。为此先将[1]中引理3.12做如下推广。

引理 设$D\subset R^n$是有界闭集，对每一$\xi\in D$，$A(\xi)\in L(R^n)$均是P_-矩阵。若$A(\xi)$于D上连续，则存在常数$c>0$，使对任何$\xi\in D$，$x\in R^n$，$x\neq 0$及任意的$k\in M=\{i\in N;\ x_i(A(\xi)x)_i>0\}$均有

* 1982年11月28日收到。

$$x_k(A(\xi)x)_k \geqslant c\|x\|^2.$$

借助此引理，可得如下进一步结果。

定理 2 设 $F: Q\subset R^n \to R^n$ 于闭矩形 Q 上连续 F_- 可微，且对每一 $x\in Q$，$F'(x)$ 是 P_- 矩阵，则 F 是 Q 上的一致 P_- 函数。即存在常数 $c>0$，使对任何 $x,y\in Q$，$x\neq y$，有 $k\in N$，满足

$$(x_k-y_k)(f_k(x)-f_k(y)) \geqslant c\|x-y\|^2.$$

推论 设 $F: Q\subset R^n \to R^n$ 是闭矩形 Q 上的连续 F_- 可微函数，且对 $x\in Q$，$F'(x)$ 是 P_- 矩阵，则 F 是从 Q 到 FQ 上的同胚。

定理 2 表明，从 $F'(x)$ 是 P_- 矩阵出发不仅能得出 F 是 P_- 函数，而且能得出 F 是一致 P_- 函数这样更深刻的结论。因此，反过来，仅凭 F 是 P_- 函数这点当然不能保证 $F'(x)$ 是 P_- 矩阵。进一步自然考虑把条件加强为 F 是一致 P^- 函数会怎样？答案是肯定的，这导至下面的。

定理 3 设 F： $D\subset R^n \to R^n$ 是开集 D 上的 G_- 可微的一致 P_- 函数，则对每一 $x\in D$，$F'(x)$ 是 P_- 矩阵。

如果不加一致性条件，则只能得出 $F'(x)$ 是 P_0- 矩阵。前举反例恰因它在原点附近不是一致 P_- 函数，从而导至 $F'(0)$ 不是 P_- 矩阵。

参 考 文 献

[1] Morè, J., Rheinboldt, W., On P_ and S_ function and related classes of n_ dimensional nonlinear mappings, Computer Science Center, University of Maryland, Technical Report, 70—120.

[2] Fiedler, M., and Ptak, V., *Num. Math*, 9.(1966), 163—172.

[3] Fiedler, M., and Ptak, V., *Czech. Math.* J.12(1962), 382—400.

[4] Rheinboldt, W., On Classes of n_Dimensional Nonlinear Mappings Generalizing Several Types of Matrices. in Proc, Symp. on Num. Sol of Part. Diff, Equ. JJ, Academic Press, New York, P501—545(1971).