第4卷 第4期 1984年10月 | 数学研究与评论 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION | Vol.4 No.4 Oct. 1984

关于 Simon 和 Murty 猜想的证明*

徐俊明

（中国科学技术大学数学系）

我们沿用书[1]中的记号和术语。设 $G=(V,E)$ 是简单有限无向图，其中 $V=V(G)$，$E=E(G)$ 分别是 G 的顶点集合和棱集合。$\nu(G)=|V(G)|$，$\varepsilon(G)=|E(G)|$。设 $x,y\in V(G)$，x 和 y 之间的距离 $d_G(x,\ y)$ 定义为 G 中最短 $(x,\ y)$ 路(path)的长度；如果 x 和 y 在 G 中不连通，则定义 $d_G(x,\ y)=\infty$。G 的直径 $\mathrm{diam}(G)$ 定义为 G 中最大的距离，即

$$\mathrm{diam}(G)=\max_{x,y\in V(G)} d_G(x,\ y).$$

图 G 称为是直径 k 临界的，如果对每个 $e\in E(G)$，有

$$\mathrm{diam}(G-e)>\mathrm{diam}(G)=k.$$

完全图 K_n 是唯一的直径 1 临界图。当 $k\geqslant 2$，确定直径 k 临界图的棱数是一个很自然的问题。对于直径 2 临界图，Simon 和 Murty 曾作过如下猜想(见[2])：

如果 G 是直径 2 临界图，那么

$$\varepsilon\leqslant\left[\frac{\nu^2}{4}\right],$$

等号成立当且仅当 $G\cong K_{[\frac{\nu}{2}],[\frac{\nu}{2}]}$，其中 $\varepsilon=\varepsilon(G)$，$\nu=\nu(G)$。

对于这个猜想，Caccetta 和 Häggkvist [2] 已证明了

$$\varepsilon\leqslant 0.27\nu^2.$$

本文试图给出这个猜想的证明。

设 G 是一个直径2临界图，$x\in V(G)$，令 G 中与 x 相邻的顶点集合为 $N_G(x)$，即

$$N_G(x)=\{u\in V(G)\,|\,xu\in E(G)\}.$$

记 $d_G(x)=|N_G(x)|$。设 $x,\ y\in V(G)$，$xy\notin E(G)$，用 $\overline{x\ y}$ 表示 $\overline{G}$ 中端顶点为 x 和 y 的棱，其中 $\overline{G}$ 为 G 的补，并用 $\overline{(N,\ M)}$ 表示 $\overline{G}$ 中一端顶点在 N 中而另一端顶点在 M 中的棱集合，其中 N、M 为 $V(G)$ 的非空真子集合。取 $u\in V(G)$，使得 $d_G(u)$ 具有最大的值。令 $N=N_G(u)$，并令 $M=V(G)-(N\cup\{u\})$。分别记 G 中由 N 和 M 导出子图的棱集合为 E_N 和 E_M。若 $E_N\cup E_M=\varnothing$，则 G 是二部分图，因而有 $\varepsilon\leqslant\left[\frac{\nu^2}{4}\right]$。若 $E_N\cup E_M\neq\varnothing$，我们则要证明对任何

* 1983年9月8日收到。

$e \in E_N \cup E_M$，有 $\overline{e} \in (N, M)$ 与 e 对应，且使得当 e_1，$e_2 \in E_N \cup E_M$，且 $e_1 \neq e_2$，则对应的 $\overline{e_1}$，$\overline{e_2} \in (N, M)$ 也有 $\overline{e_1} \neq \overline{e_2}$。

设 $e = u_1u_2 \in E_N$。由于 G 是直径 2 临界的，所以 $\mathrm{diam}(G-e) > \mathrm{diam}(G) = 2$。于是存在两顶点 x 和 y 使得 $d_{G-e}(x,y) > 2$.显然，$\{x,y\} \neq \{u_1,u_2\}$，并且 $xy \notin E(G)$，因而 $d_G(x,y) = 2$。于是存在 $Z \subseteq V(G) - \{x,y\}$，使得对每个 $z \in Z$，有 $xz, yz \in E(G)$。如果 $\{x,y\} \cap \{u_1,u_2\} = \emptyset$，那么 $xz, yz \in E(G-e)$，即 (x,z,y) 是 $G-e$ 中长为2的 (x,y) 路。所以我们有 $d_{G-e}(x,y) \leqslant 2$.这与 x 和 y 的选取矛盾。于是 $\{x,y\} \cap \{u_1,u_2\} \neq \emptyset$。不妨设 $y = u_1$，因而 $Z = \{u_2\}$。于是 (x, u_2, u_1) 是 G 中唯一的长为 2 的 (x, u_1) 路，且 $xu_1 \notin E(G)$。对 $e = u_1u_2 \in E_N$，令

$$A_e(u_1) = \{x \in V(G) \mid d_G(x,u_1) = 2 \text{ 且任何长为2的}(x,u_1)\text{路包含}e\}.$$

容易看到 $A_e(u_1) \subseteq M$。这是因为，若存在 $x \in A_e(u_1)$ 且 $x \notin M$，显然 $x \neq u$。于是 $x \in N$，那么 (x,u,u_1) 是 G 中长为 2 的且不含 e 的 (x, u_1) 路，这与 x 的选取矛盾。故我们取某 $x \in A_e(u_1)$ 令 $\overline{e} = \overline{xu_1}$ 即可。

对 $e \in E_M$，用如下方法取 $\overline{e} \in (N, M)$ 与 e 对应：

(a) 设 $y \in M$，且 $N_G(y) \cap M \neq \emptyset$。若不存在 $e' \in E_N$，使 y 是 $\overline{e'}$ 的一个端点，因 $d_G(y) \leqslant d_G(u) = |N|$。所以 y 在 N 中至少有 $|N_G(y) \cap M|$ 个不相邻的顶点。于是，对 E_M 中一端点为 y 的棱，可取 (N, M) 中不同的棱与它们对应。

(b) 对于在 (a) 中未被对应的 E_M 中的棱 $e = yz$，必存在 $e' = u_1u_2 \in E_N$，且不妨设 $\overline{e'} = yu_1$。此时，有 $zu_1 \notin E(G)$。若不存在 $e'' \in E_N$，使 $\overline{e''} = zu_1$，则取 $\overline{e} = zu_1$。否则，存在 $e'' \in E_N$，使 $\overline{e''} = zu_1$。此时，$zu_2 \notin E(G)$，取 $\overline{e} = zu_2$。

下面我们将要证明：若 e_1，$e_2 \in E_N \cup E_M$，且 $e_1 \neq e_2$，则对应的 $\overline{e_1}$，$\overline{e_2} \in (N, M)$ 也有 $\overline{e_1} \neq \overline{e_2}$。对此只要证明：当 e_1，$e_2 \in E_N$ 时结论成立。容易证明 $e_1, e_2 \in E_N$，结论成立。事实上，设 $e_1 = u_1u_2$，$e_2 = u_2u_3$，$\overline{e_1} = \overline{e_2} = \overline{u_1x}$，$x \in A_{e_1}(u_1) \cap A_{e_2}(u_1)$，那么 (x, u_3, u_1) 是 G 中长为 2 且不含 e_1 的 (x, u_1) 路，而 (x, u_2, u_1) 是 G 中长为 2 且不含 e_2 的 (x, u_1) 路，这与 x 的选取矛盾。证毕。

参考文献

[1] Bondy, J. A. and Murty, U. S. R., Graph Theory with Applications, MacMillan, London, 1976.

[2] Caccetta, L, and Häggkvist, R., On diameter critical graphs, *Discrete Math.* 28 (1979), 223-229.