第4卷 第4期 1984年10月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.4 No.4 Oct. 1984

回归系数线性函数的均方相合估计——问题与猜测*

陈希孺

（中国科技大学数学系）

设有线性模型

$$Y_i = x_i'\beta + e_i, \quad i = 1, \cdots, n, \cdots \tag{1}$$

其中$\{x_i\}$为已知的p维向量，β为未知的p维向量，$\{e_i\}$为随机误差序列。以$\hat{\beta}_n$记β的基于(1)的前n个观测值$Y_1, \cdots, Y_n$的最小二乘估计（LSE）。在[1]中，我们曾建立如下的结果：

定理 设$\{e_i\}$满足条件$Ee_i = 0$，$Ee_ie_j = \sigma^2\delta_{ij}(0<\sigma^2<\infty)$，$i, j = 1, 2, \cdots$。又设当$n$充分大时，$c'\beta$在(1)的前$n$个观察值之下为线性可估。如果当$n\to\infty$时$\mathrm{Var}(c'\hat{\beta}) \not\to 0$，则不可能存在形如$T_n = a_{n0} + \sum_{i=1}^{n} a_{ni}Y_i$的线性估计，使$\lim_{n\to\infty} E(T_n - c'\beta)^2 = 0$，即$c'\beta$的线性均方相合估计不存在。又若$\{e_i\}$除上述条件外，还为相互独立，且不存在常数$a$及自然数子列$\{n_i\}$，使$e_{n_i} \xrightarrow{P} a$当$i\to\infty$，则当$\mathrm{Var}(c'\hat{\beta}_n) \not\to 0$时，$c'\beta$的线性弱相合估计也不可能存在。

这一结果显示了LSE在线性估计类中的独特地位。另一方面，作者近日建立了如下的结果[2]：

定理 设有$Y_i = x_i'\beta + e_i$，$i = 1, \cdots, n$。其中$e_1, \cdots, e_n$独立，$e_i \sim N(0, \sigma^2)$，$i = 1, \cdots, n$。对任意指定的$A>0$，可在$[-A, A]$之外适当修改e_1的分布使与β有关，但保持均值0方差σ^2，使在修改后的模型之下，任一线性函数$c'\beta$都存在无偏估计量。

如果矩阵$[x_1 \vdots \cdots \vdots x_n]$的秩小于$p$，则有许多线性函数不是线性可估，即不存在其线性无偏估计，但上述定理表明：有可能存在其非线性无偏估计。因此，尽管在线性模型中，回归系数β的线性函数的自然估计类是线性估计类，但非线性估计可能提供一些线性估计不能提供的东西。这一点启示我们考虑如下的问题：当$\mathrm{Var}(c'\hat{\beta}_n) \not\to 0$时，有否可能存在$c'\beta$的非线性均方相合或弱相合估计？

下面我们先提出关于这个问题正反两方面的例子。这些例子说明了问题的复杂性。然后我们提出几个与此有关的未决问题，供有兴趣同志们研究。

例1 $\mathrm{Var}(c'\hat{\beta}_n) \not\to 0$，但存在非线性的均方相合估计。

考虑$Y_i = \beta/i + e_i$，$i = 1, \cdots, n, \cdots$。本模型只包含一个回归系数β。设$e_1, e_2, \cdots$独立，其分布为

* 1984年1月6日收到。

$$P(e_n=\sigma e^n)=P(e_n=-\sigma e^n)=\frac{1}{2}e^{-2^n},\ \ P(e_n=0)=1-e^{-2^n},$$

此处 $0<\sigma<\infty$。由于 $Ee_n=0$，$\mathrm{Var}(e_n)=\sigma^2>0$ 与 n 无关，且 $\sum_{i=1}^{\infty}i^{-2}<\infty$，由上引定理知 β 的线性均方相合估计不存在。

现引进估计量 $\tilde{\beta}_n=\tilde{\beta}_n(Y_1,\cdots,Y_n)$ $(n\geqslant 2)$ 如下：

$$\tilde{\beta}_n=\begin{cases} nY_n, & \text{若}\frac{1}{2}|Y_{n-1}|\leqslant|Y_n|\leqslant 2|Y_{n-1}|; \\ 0, & \text{其他。}\end{cases} \tag{1}$$

则由
$$E(\tilde{\beta}_n)=P(e_{n-1}=0)E(\tilde{\beta}_n|e_{n-1}=0)+P(e_{n-1}\neq 0)E(\tilde{\beta}_n|e_{n-1}\neq 0)$$
以及对固定的 β 当 n 充分大时有

$$E(\tilde{\beta}_n|e_{n-1}=0)=(1-e^{-2^n})\beta,\ \ E(\tilde{\beta}_n|e_{n-1}\neq 0)=0,$$

得

$$E(\tilde{\beta}_n)=(1-e^{-2^{(n-1)}})(1-e^{-2^n})\beta. \tag{2}$$

又

$$\mathrm{Var}(\tilde{\beta}_n)=E\{\mathrm{Var}(\tilde{\beta}_n|e_{n-1})\}+\mathrm{Var}\{E(\tilde{\beta}_n|e_{n-1})\}\triangleq J_1+J_2, \tag{3}$$

对固定的 β 当 n 充分大时有

$$\begin{aligned} J_1&=P(e_{n-1}=0)\mathrm{Var}(\tilde{\beta}_n|e_{n-1}=0)+P(e_{n-1}\neq 0)\mathrm{Var}(\tilde{\beta}_n|e_{n-1}) \\ &=(1-e^{-2^{(n-1)}})(1-e^{-2^n})e^{-2^n}\beta^2, \end{aligned} \tag{4}$$

$$J_2=(1-e^{-2^n})^2(1-e^{-2^{(n-1)}})e^{-2^{(n-1)}}\beta^2. \tag{5}$$

由(2)—(5)得出

$$\lim_{n\to\infty}E(\tilde{\beta}_n-\beta)^2=\lim_{n\to\infty}\{(E\tilde{\beta}_n-\beta)^2+\mathrm{Var}(\tilde{\beta}_n)\}=0,$$

因此由(1)式定义的 $\tilde{\beta}_n$ 是 β 的均方相合估计。

例 2 $\mathrm{Var}(c'\hat{\beta}_n)\not\to 0$，也不存在 $c'\beta$ 的均方相合估计，不论是线性或非线性的。

仍设 $Y_i=\beta/i+e_i$，$i=1,\cdots,n,\cdots$。此处 $e_1,e_2,\cdots$ 独立，且都有正态分布 $N(0,\sigma^2)$。现设 $\tilde{\beta}_n=\tilde{\beta}_n(Y_1,\cdots,Y_n)$ 为 β 的均方相合估计，则将有

$$\lim_{n\to\infty}B(\tilde{\beta}_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\{E_{(1,1)}(\tilde{\beta}_n-1)^2+E_{(-1,1)}(\tilde{\beta}_n+1)^2\}=0, \tag{6}$$

式中 $E_{(\beta_0,\sigma_0^2)}$ 表示期望值是在 $\beta=\beta_0$，$\sigma^2=\sigma_0^2$ 之下计算的。

现记 $\hat{\beta}_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}Y_i\Big/\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}$，则 $\hat{\beta}_n$ 为 β 的最小二乘估计，且 $\hat{\beta}_n\sim N(\beta,a_n^2)$，其中 $a_n^2=\sigma^2\Big/\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}$。引进 (β,σ) 的先验分布 G：

$$G\{(\beta,\sigma^2)=(1,1)\}=G\{(\beta,\sigma^2)=(-1,1)\}=\frac{1}{2}.$$

不难验证，在这一先验分布之下，β 的(在平方损失下的) Bayes 估计为

$$\beta_n^* = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}c_n(\hat{\beta}_n-1)^2\right)-\exp\left(-\frac{1}{2}c_n(\hat{\beta}_n+1)^2\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2}c_n(\hat{\beta}_n-1)^2\right)-\exp\left(-\frac{1}{2}c_n(\hat{\beta}_n+1)^2\right)},$$

其中 $c_n=\sum_{i=1}^{n} i^{-2}\to c=\pi^2/6$。$\beta_n^*$ 在先验分布 G 之下的 Bayes 风险为

$$B(\beta_n^*)=\frac{1}{2}\{E_{(1,1)}(\beta_n^*-1)^2+E_{(-1,1)}(\beta_n^*+1)^2\}. \tag{7}$$

由于 β_n^* 有界，且当 $n\to\infty$ 时，$\hat{\beta}_n$ 的分布收敛于 $N(\beta,\sigma^2/c)$，知

$$\lim_{n\to\infty}B(\beta_n^*)=\frac{1}{2}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2\pi}}(h(x)-1)^2e^{-\frac{c}{2}(x-1)^2}dx\right.$$

$$\left.+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2\pi}}(h(x)+1)^2e^{-\frac{c}{2}(x+1)^2}dx\right\}>0, \tag{8}$$

此处 $h(x)$ 是由将 β_n^* 表达式中的 $\hat{\beta}_n$ 换为 x 而得。但由 Bayes 估计的定义，有 $B(\beta_n^*)\leqslant B(\tilde{\beta}_n)$，对一切 n。故由(8)式知应有 $\liminf\limits_{n\to\infty}B(\tilde{\beta}_n)>0$，与(6)式矛盾。这证明了具有均方相合性的估计 $\tilde{\beta}_n$ 不可能存在。实际上，我们证明的更多：在 β 的两个不同值处为均方相合的估计不可能存在。

由以上正反两面的例子，自然地提出下面的

问题　随机误差序列 $e_1,e_2,\cdots$ 要满足什么条件，才能使如下的性质成立：当 $c'\beta$ 的最小二乘估计 $c'\hat{\beta}_n$ 不为 $c'\beta$ 的均方相合估计时，根本不存在 $c'\beta$ 的均方相合估计（不论是线性的或非线性的）。

由例 2 知，，当 $e_1,e_2,\cdots$ 独立且都服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$ 时，这一性质成立。由此自然引出下面的

猜测 1　当 $e_1,e_2,\cdots$ 独立同分布，$Ee_1=0$，e_1 的方差非 0 有限时，上述性质成立。

这个猜测中对 $e_1,e_2,\cdots$ 的要求，几乎可以肯定是不必要地太强了。结合本文作者在[1]中提出的一个关于线性估计弱相合的结果，可以提出下述更强得多的猜测。称一串随机变量 $\{\xi_n\}$ 为渐近退化的，若存在常数 a，使 $\xi_n\xrightarrow{P}a$ 当 $n\to\infty$。

猜测 2　若 $e_1,e_2,\cdots$ 独立，均值为 0，具有非 0 有限的方差 σ^2，又设 $\{e_n\}$ 中不存在渐近退化的子序列，则上述性质成立。

还可以猜测：上述猜测中关于 $\{e_n\}$ 中不存在渐近退化子序列一条，在一定意义上是必要的。即若这条件不成立。就可以找到 $c'\beta$，其最小二乘估计 $c'\hat{\beta}_n$ 不为均方相合，但其某个非线性估计却是均方相合的。作出这一猜测的根据是例 1。

参 考 文 献

[1] 陈希孺，线性估计弱相合性的一个问题。数学年刊。1981年第 1 期。
[2] 陈希孺，论线性回归系数两种可估性的关系。

Mean Square Consistency of Estimates of Linear Functions of Regression Coefficients

Chen Xiru

(The University of Science and Technology of China)

Abstract

In this note we discuss the following problem: Whether or not there exists a non-linear mean-square consistent estimate of a linear function of regression coefficients, in case that a linear one does not exist? Example and counter-example are presented, togather with some conjectures related to this problem.