第4卷 类4期
1 9 8 4年10月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vo1.4 No.4
Oct. 1984

评“可结合的BCI代数”*

沈百英

（南京大学数学系）

载于“科学通报”1982年第12期（pp. 714—716）上胡庆平与井关清志（日本数学家K. Iséki）的文章“可结合的BCI代数”（以下简称“原文”），由于1980年在日本的杂志“Math、Seminar Notes Kobe Univ.”（Vol. 8, pp. 553—555）上已基本上登载过，这次重又在国家一级刊物“科学通报”上发表，笔者冒昧提出一些看法。

BCI代数与BCK代数（以下简称“双B代数”）都是在1966年由日本数学家井关清志等首先提出的。它的起因是把集合运算中的“差”运算与命题演算中的蕴涵词的共同性质抽象出来作为一个代数系统来研究，所不同的是在集合论中差运算是作为导出概念而讨论，（在命题演算中有把蕴涵词作为导出概念，但目前更倾向于把它作为基本的独立的概念加以讨论，）而在双B代数中相应的运算是作为最基本的原始概念出现的。这样在代数系统的研究中，除了“群”的一条线（其基本运算具有对称性），“格”的一条线（其基本运算亦具有对称性，但它以幂等性来与群运算加以区别，从而引入了次序关系）以外，又有了双B代数的一条线。双B代数的基本运算“*”以其不具对称性而与群、格等区别开来，从而独立于群、格以外（双B代数的另一长处是使用基本运算定义次序关系特别简单、自然）。

值得提醒注意的是，当1966年井关清志的基本文章发表后，数理逻辑学家H.B.Curry在1967年对此文章的评论（见美国的“Math. Review”1967, MR34#2433）中就把BCK代数的基本运算“*”写为“－”（减），并加附注说：“作者（指井关清志——笔者注）写为$x*y$，但写为$x-y$更有暗示性”。

现在我们回过来谈谈原文。由于在BCI代数中引入了可结合律，就等于人为地使得BCI代数的基本运算具有了“对称性”（把“减”的本质强行改为“加”的性质），这就使得双B代数的研究失去了原来的面目（从而失去了存在的价值）。事实上双B代数的研究是很有意义的。（它实质上亦可看作命题演算中研究更广泛的蕴涵系统。）但经过人为地加入“对称性”，使得双B代数运算“*”亦可交换，特别把次序关系变成了相等关系（可以证明，在所谓的可结合BCI代数中，由$x*y=0$即$x\leqslant y$可推出$x=y$），因此次序关系没有了，这就使得双B代数的特征全都丢失掉。不出所料，原文定理4说明了可结合BCI代数是一个非常特殊的群，即以自己作为自己的逆元的群。反过来，我们更可证明[1]这种特

* 1983年10月29日收到。

殊的群也就是所谓的可结合 BCI 代数。因为我们可以把这种 BCI 代数的公理（共六条）归结为下面三条：

$$(x*y)*z=x*(y*z),$$

$$x*0=x,$$

$$x*x=0.$$

如果把“*”看作群运算，这就是“对合群”的特征。于是所谓可结合 BCI 代数就是“对合群”，而“对合群”亦就是“可结合 BCI 代数”.因此，除非在群的理论的长时间的研究中还未对这种极特殊的群进行过详细的研究，并且对这种特殊群的价值作详细的研究，否则的话，再对此研究下去（象在原文末作者所交待的那样），只能是在新的名称下重述老的结果，而且亦给人一个错觉，似乎双 B 代数没有新的质的东西。

上述愚见如有错误之处，敬请原文作者们与国内专家们批评指正。

注　原文中提到的日本数学家引入的可换的 BCI 代数（也即可换的 BCK 代数），是满足条件

$$x*(x*y)=y*(y*x)$$

的 BCI 代数，而此条件正是递归算术中算术减的特征，亦是下半格运算 $x\wedge y\ (=x*(x*y))$ 的一个对称性质，这完全是合乎情理的。这与“*”本身的可换性完全是两回事。

1）在原文的1980年文章中亦已交待了早在1980年的日本文章中用不同的方法得到“对合群”亦是可结合BCI代数的结论.