第5卷 第2期
1985年4月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.2
April 1985

左零因子理想具升键条件之Γ-环和广义Γ-环*

陈维新

(浙江大学)

谢邦杰在[1]中巧妙地引进了一个介于右零化子与左理想之间的概念：左零因子理想，籍此简捷地证明了：左零因子理想具升链条件结合环Ω的诣零单侧理想恒为幂零。从而改进了结合环论中著名结果(Levitzni, 1950)：左Noether环的诣零单侧理想恒为幂零。本文将引用[1]的技巧在Γ-环中考察类似问题，证明了：左零因子理想具升链条件的Γ-环的强诣零右理想恒为强幂零的。最后还讨论了如何使[1]的结论成为本文的特款，为此引进了一个新的概念：广义Γ-环。下面先介绍一些概念：

定义1 Γ-环A中一个元素x称为强幂零的，且强幂零指数为n，若$x\Gamma x\Gamma\cdots x=\{0\}$，其中$\Gamma$在上式左边出现$(n-1)$次(简记作$(x\Gamma)^{n-1}x=\{0\}$，下同)，且$n$是具有这样性质的最小正整数。

定义2 Γ-环A中一个子集合S称为强诣零的，若S中每个元素都是强幂零的。

当强诣零子集S中每个元素的强幂零指数均为有限时，我们把其中最大的那个数称作为S的上指数。

定义3 Γ-环A中一个子集合S称为强幂零的，且强幂零指数为n，若$(S\Gamma)^{n-1}S=\{0\}$，且n是具有这样性质的最小正整数。

定义4 若L是Γ-环A的一个左理想，且至少有某个$0\neq x\in A$使得$L\Gamma x=\{0\}$。则称L为左零因子理想。

显然若I是A的非零强幂零左理想$(I\Gamma)^{n-1}I=\{0\}$，则I必是左零因子理想。因$(I\Gamma)^{n-1}I=I\Gamma[(I\Gamma)^{n-2}I]=\{0\}$，其中$(I\Gamma)^{n-2}I\neq\{0\}$。

定义5 设S是Γ-环A的一个非空子集，则$L_S=\{x\in A|x\Gamma S=\{0\}\}$称为$S$的左零化子。

对S的右零化子可类似定义。

易见凡左(右)零化子必为左(右)理想，故只要$S\neq\{0\}$，S的左零化子必为左零因子理想。反之，左零因子理想未必能找到一个A的子集S使之恰好成为S的左零化子，故左零因子理想未必是左零化子。

下面开始推导本文主要结果：

*1982年6月1日收到。

预理1　设 I 是 Γ-环 A 的强幂零单侧理想，则 I 必包含在 A 的一个强幂零理想中。

证　不妨设 I 是 A 的强幂零左理想，强幂零指数为 k，则 $(I\Gamma)^{k-1}I=\{0\}$。作 $J=I+I\Gamma A$。易见 J 是 A 的一个理想，且 $I\subseteq J$。计算：

$$(J\Gamma)^k J=[(I+I\Gamma A)\Gamma]^k(I+I\Gamma A)$$

$$\subseteq(I\Gamma)^{k-1}I+[(I\Gamma)^{k-1}I]\Gamma A=\{0\}.$$

在展开计算中利用到 I 是 A 的左理想，凡左乘在 I 上的均可吸收，故有上述结果。这样 I 就含在强幂零理想 J 中。 ▮

预理2　上指数为 2 的强诣零左(右)理想恒为若干个(有限或无限个)强幂零左(右)理想的併集。

证　不妨证"右"的情况，"左"也类似。设 I 是 Γ-环 A 的一个上指数为 2 的强诣零右理想，则 $\forall x\in I$ 有 $x\Gamma x=\{0\}$。欲证 I 是 A 的若干个强幂零右理想的併集，只要证 I 中任意一个非零元素 a 必属于 A 的一个含于 I 中的强幂零右理想就够了。

令 L 为 I 中任意一个非零元素 a 的左零化子，再令 R 为 L 的右零化子，显见 $a\in R$。作 $B=R\cap I$，则 B 是 A 的一个含于 I 中的强诣零右理想，且 $a\in B$。下证 B 是强幂零的。

$\forall b\in B$，据 $B=R\cap I\Rightarrow b\in R$。另一方面 $a\Gamma a=\{0\}\Rightarrow a\in L\Rightarrow a\Gamma b\subseteq L\Gamma R=\{0\}$。

据 I 的上指数为2 $\Rightarrow b\Gamma b=a\Gamma a=(a+b)\Gamma(a+b)=\{0\}\Rightarrow a\Gamma b+b\Gamma a=\{0\}\Rightarrow b\Gamma a=\{0\}$ $\Rightarrow b\in L$。由 b 的任意性知 $B\subseteq L$。故 $B\Gamma B\subseteq L\Gamma R=\{0\}$。

这样 I 中任意一个非零元素 a 必属于 A 的一个含于 I 中的强幂零右理想。 ▮

定理1　左零因子理想具有升链条件的 Γ-环 A 的强诣零右理想恒为强幂零的。

证　因为 Γ-环 A 的非零强幂零理想恒为左零因子理想，故无论 A 是否含有非零的强幂零理想，A 中恒存在唯一的一个最大强幂零理想 N。这是因为当 A 不含非零的强幂零理想时 $N=\{0\}$。否则据升链条件知有一个极大元。据 Γ-环中熟知的结果：

强幂零理想的有限和还是强幂零理想；

强幂零理想借助于强幂零理想的扩张还是强幂零理想。

知这个极大元包含了 A 的一切强幂零理想，故为唯一最大的强幂零理想，记作 N。据预理 1 知 N 也包含了 A 的一切强幂零单侧理想，故 $\bar{A}=A/N$ 不含非零的强幂零(左、右、双侧)理想。

现在只要证明这个 N 已包含 A 的一切强诣零右理想即可，用反证法证之：设 R 是 A 的一个强诣零右理想，且 $R\subsetneq N$，取 $x\in R$ 但 $x\notin N$。令 L_x 为 x 在 A 中的左零化子，则 $L_x\Gamma x=\{0\}$。据题设有极大者，设其一为 L_a，L_a 为某个 $a\in R$ 且 $a\notin N$ 的左零化子，显见 L_a 为左理想。再令 R_a 为 L_a 在 R 中的右零化子，即 $R_a=\{x\in R\mid L_a\Gamma x=\{0\}.\}$。由 R 为 A 的右理想知 R_a 为含于 R 中的 A 的右理想。可断言当 $y\in R_a$ 但 $y\notin N$ 时，y 在 A 中的左零化子恰为 L_a，这是因为：

$L_a\Gamma y=\{0\}\Rightarrow L_a\subseteq L_y$。然而由 L_a 的极大性知 $L_a=L_y$。

换言之所有不在 N 中的 R_a 中元素均有共同的左零化子 L_a，自然 a 也在这些元素中(因 $a\notin N$。且 $L_a\Gamma a=\{0\}$ 即 $a\in R_a$)。下断言所有这种元素 y($y\in R_a$ 且 $y\notin N$)均有性质 $y\Gamma y\subseteq N$。

若不然，则至少有一个y_0使$y_0\Gamma y_0 \subsetneq N$ $\Rightarrow$至少有某个$\alpha \in \Gamma$使$y_0\alpha y_0 \bar{\in} N$。显见此时$y_0$的强幂零指数$m > 2$。考察：$(y_0\Gamma)^{m-2}(y_0\Gamma y_0) = \{0\}$。因$y_0\alpha y_0 \in R_a$，但$y_0\alpha y_0 \bar{\in} N$，故$y_0\alpha y_0$的左零化子为$L_a$。上式意指：$(y_0\Gamma)^{m-3}y_0 \subseteq L_a$，然而$y_0$的左零化子也是$L_a$，故有：$[(y_0\Gamma)^{m-3}y_0]\Gamma y_0 = (y_0\Gamma)^{m-2}y_0 = \{0\}$，这和$y_0$的强幂零指数为$m$相矛盾。故$y\Gamma y \subseteq N$。

于是在$\bar{A} = A/N$中$\bar{R}_a = R_a + N/N$就是一个上指数为 2 的非零的强诣零右理想，由预理 2 知$\bar{A}$含有非零的强幂零右理想，此为矛盾。故N已包含A的一切强诣零右理想，故此时A的所有强诣零右理想恒为强幂零的。 ▮

推论　左零因子理想满足升链条件的强诣零Γ-环必为强幂零的。 ▮

因Γ-环是比结合环更广泛的环类，理所当然地希望[1]的结论成为本文的特款。然而若按通常的作法：对一个结合环R，取$\Gamma = R$，定义$x\alpha y$就是R中的乘法，使R解释成为一个Γ-环。这时作为Γ-环R的一个元素x是强幂零的就相当于结合环中x生成的单侧理想是幂零的，这就和结合环中一个元素是幂零的相差太远，必须另寻新径，请注意到在本文上述所有论述中，事实上并没有涉及到Γ本身的 Abel 群的加法构造。因而当Γ是一个集合时也可进行完全类似的讨论。这就使得有可能引入下述新概念。

定义6　设$\Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma, \cdots\}$是一个非空集合，所谓广义$\Gamma$-环是可换加群$A = \{x, y, z, \cdots\}$具有一个合成：$A \times \Gamma \times A \to A$，对任意$x, y, z \in A$，任意的$\alpha, \beta \in \Gamma$满足下述条件：

1）$(x+y)\alpha z = x\alpha z + y\alpha z$；$x\alpha(y+z) = x\alpha y + x\alpha z$。

2）$x\alpha(y\beta z) = (x\alpha y)\beta z$。

在广义Γ-环中首先可把上文涉及到的Γ-环的所有概念诸如理想，零化子等等全部搬到广义Γ-环中来，然后可以完全重复上述讨论得到：

定理1′　左零因子理想具有升链条件的广义Γ-环A的强诣零右理想恒为强幂零的。 ▮

任意一个结合环R都可自然地解释成为一个广义Γ-环，这只要取$\Gamma = \{e\}$，即仅由一个元素e构成的单元集，定义：$\forall x, y \in R$，$xey = xy$。容易验证R是一个广义Γ-环。此时R的一个元素x视作广义Γ-环的元素是强幂零的就等价于x视作结合环的元素是幂零的；R的一个子集S视作广义Γ-环的子集是广义Γ-环的(左，右，双侧)理想就等价于S视作结合环的子集是结合环的(左，右，双侧)理想；S在广义Γ-环中强幂零(强诣零)等价于S在结合环中幂零（诣零）。对左零因子理想无论是在结合环中说，还是在广义Γ-环中说都是一致的。而且在这种广义Γ-环中易见(其实即和结合环中一样证)有：

含有非零的强诣零左理想$\Leftrightarrow$含有非零的强诣零右理想。

一个结合环R按这种解释自然而然所成的广义Γ-环，我们记作为$R(\Gamma)$。利用定理 1′知对任意的$R(\Gamma)$言有：

命题1　左零因子理想具升链条件的广义Γ-环$R(\Gamma)$的单侧强诣零理想恒为强幂零的. ▮

这结果就是[1]的主要定理，从而本文定理1′包含了[1]的结论。

参　考　文　献

[1]　谢邦杰，左零因子理想具升链条件之环，数学进展，10(1981)№. 2，153-154.

The Γ-rings and Generalized Γ-rings with Ascending Chain Condition on Left Zero Divisor Ideals

Chen Weixin

(Zhejiang University)

Abstract

In this paper the following result is obtained:

(*): If Γ-ring A satisfies ascending chain condition on left zero divisor ideals, then every strongly nil right ideal is strongly nilpotent.

In order that (*) may contain the corresponding result of associative rings, a new concept, generalized Γ-ring is introduced. So that any associative ring is naturally explained as a generalized Γ-ring. It is proved that (*) is valid in the generalized Γ-rings, thence the result of associative rings is a special case in the generalized Γ-rings.

来信简述两则

一、本刊第四卷(1984)第三期，155—165页杨忠强同志评论中所提到的问题，已经张石生同志在1984年重庆出版社出版的《不动点理论及应用》一书中纠正了(见该书定理1.8.2、1.8.3、1.8.11与1.8.9)。

二、北方交大管科所陶瑞华同志来信告知：本刊第四卷(1984)第四期，15—18页所刊文章"关于愉快图的Bodendiek猜想"一文的结果，早在1980年就发表过了。参看C. Delorme et al, Cycles with a chord are graceful, J. Graph Theory, 4(1980), 409—416.