一族正则函数的积分与凸性组合*

高建福

（山西省忻县师专数学科）

设$f(z)$是单位圆$|z|<1$中的正则函数，并且$f(0)=0$，$f'(0)=1$，这种函数的全体记为N，N中满足条件：

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>\beta, \qquad (\beta<1)$$

的函数的全体叫做β级星象函数，记为$s(\beta)$，显然$s(0)$和$s\left(\frac{1}{2}\right)$是我们所熟知的星象函数族$s^*$与$\frac{1}{2}$级星函数族$S_*$，若$f(z)\in N$，当且仅当有$g(z)\in s(\beta)$，$\beta<1$，使得

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf^{\alpha-1}(z)f'(z)}{g^{\alpha}(z)}\right\}>0,$$

此处$\alpha>0$，则记这样函数的全体为$B(\alpha,\beta)$、特别$B(\alpha,0)=B(\alpha)$是Bazilevič函数族。

本文应用Jack引理(Jack, I. S. J. London Math. Soc. 3(1971)469—474)获得了下面的结果。

定理 1　设$\alpha>0$，$\beta<1$，对於$f(z)\in B\left(\alpha,\beta-\frac{\alpha\beta+c}{2\alpha^2(1-\beta)}\right)$，$-\alpha\beta\leqslant c\leqslant\alpha(1-2\beta)$，或$f(z)\in B\left(\alpha,\beta-\frac{1-\beta}{2(\alpha\beta+c)}\right)$，$c\geqslant\alpha(1-2\beta)$。令$F(z)=\left[\frac{\alpha+c}{z^c}\int_0^z t^{c-1}f^{\alpha}(t)dt\right]^{1/\alpha}$，则$F(z)\in B(\alpha,\beta)$。

定理 2　设$c>0, f(z)\in S\left(\frac{2c+\alpha-1}{2(2c+\alpha)}\right)$，对任何$\alpha\geqslant1, c\geqslant0, 0\leqslant\lambda<1$，作$F(z)=(1-\lambda)z+\lambda\left[\frac{\alpha+c}{z^c}\int_0^z t^{c-1}f^{\alpha}(t)dt\right]^{1/\alpha}$，则$F(z)$是星象函数。

特别在定理1中取$\beta=0$，在定理2中取$\alpha=c=1$，便有

系 1　设$\alpha>0$，对于$f(z)\in B\left(\alpha,-\frac{c}{2\alpha^2}\right)$，$0\leqslant c\leqslant\alpha$或$f(z)\in B\left(\alpha,-\frac{1}{2c}\right)$，$c\geqslant\alpha$，令$F(z)=\left[\frac{\alpha+c}{z^c}\int_0^z t^{c-1}f^{\alpha}(t)dt\right]^{1/\alpha}$，则$F(z)\in B(\alpha)$。

系 2　设$f(z)\in S\left(\frac{1}{3}\right)$，对于$0\leqslant\lambda\leqslant1$，作$F(z)=(1-\lambda)z+\frac{2\lambda}{z}\int_0^z f(t)dt$，则$F(z)$是星象函数。

*1984年8月15日收到