第5卷 第2期
1985年4月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.2
April 1985

关于线性正算子逼近的若干结果*

谢敦礼

（杭州大学）

本文在O. Shisha, B. Mond[1], H. Berens, R. A. DeVore[2], 以及作者[3]的工作基础上，主要研究在高维空间里，连续函数和可积函数用线性正算子序列逼近的阶，此外，还研究了关于线性正算子序列的几乎处处收敛性的Коловкин型定理。

§1 连续函数用线性正算子序列逼近的阶

定理1.1 设E是线性赋范空间，G_1和G_2是E的紧子集，且$G_1\supset G_2$；$C(G_i)$（$i=1, 2$）表示紧集G_i上的连续函数空间，$\{K_n(\cdot,x)\}$是$C(G_1)\longmapsto C(G_2)$的线性正算子序列。那么对于任何$f\in C(G_1)$有

$$\|K_n(f,x)-f(x)\|_2\leqslant\|f\|_2\cdot\|K_n(1,\ x)-1\|_2+(1+\|K_n(1,\ x)\|_2)\omega(f,\ \mu_n) \tag{1}$$

其中$\|\cdot\|_i$表示$C(G_i)$上的范数，

$$\omega(f,\ \delta)=\sup\{|f(x)-f(y)|:\ \|x-y\|_1\leqslant\delta,\ x,y\in G_1\}, \tag{2}$$

$$\mu_n=\|K_n(\|t-x\|_1,\ x)\|_2 \quad 或 \quad \mu_n^2=\|K_n(\|t-x\|_1^2,\ x)\|_2. \tag{3}$$

作为特殊情形$E=R^m$，若$x=\{x_i\}_{i=1}^m$，$y=\{y_i\}_{i=1}^m$，$t=\{t_i\}_{i=1}^m$，则有

系1.2 设$E=R^m$，在定理1.1的条件下，对于任何$f\in C(G_1)$，（1）式成立，其中

$$\omega(f,\ \delta)=\sup\{|f(x)-f(y)|:\ \sum_{i=1}^m(x_i-y_i)^2\leqslant\delta^2,\ x、y\in G_1\},$$

$$\mu_n^2=\sum_{i=1}^m\|K_n((t_i-x_i)^2,\ x)\|_2.$$

定理1.1的证明 由$\omega(f,\ \delta)$的定义，对于$t、x\in G_1$有

$$|f(t)-f(x)|\leqslant\omega(f,\ \|t-x\|_1).$$

当$\|x-t\|_1\leqslant\delta$时，显然有

$$|f(t)-f(x)|\leqslant\omega(f,\ \delta).$$

当$\|x-t\|_1>\delta$时，可以得到

$$|f(t)-f(x)|\leqslant\omega(f,\ \|t-x\|_1\cdot\delta^{-1}\delta)\leqslant(1+\|x-t\|_1^2\cdot\delta^{-2})\omega(f,\ \delta).$$

于是，利用算子K_n是正算子，即可得到

$$\|K_n(f,\ x)-f(x)\|_2\leqslant\|K_n(f(t)-f(x),\ x)\|_2+\|f(x)\cdot[K_n(1,\ x)-1]\|_2$$
$$\leqslant[\|K_n(1,\ x)\|_2+\delta^{-2}\cdot\|K_n(\|t-x\|_1^2,\ x)\|_2]\omega(f,\ \delta)+\|f\|_2\cdot\|K_n(1,\ x)-1\|_2.$$

取$\delta^2=\mu_n^2=\|K_n(\|x-t\|_1^2,\ x)\|_2$，即得(1)。证毕。

*1982年9月25日收到。

例1　设$G=[0,1]\times[0,1]$，$f(x,y)\in C(G)$。函数$f(x,y)$所对应的Bernstein多项式为

$$B_{m,n}(f(u,v))(x,y)=\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n}p_{m,\mu}(x)\cdot p_{n,\nu}(y)f\left(\frac{\mu}{m},\ \frac{\nu}{n}\right),$$

其中

$$p_{m,\mu}(x)=\binom{m}{\mu}x^{\mu}(1-x)^{m-\mu},\ \mu=0,1,2,\cdots,m.$$

那末，由系1.2和[4]，即可得到：对于$f\in C(G)$有

$$\|B_{m,n}(f)(x,y)-f(x,y)\|\leqslant A\omega\left(f,\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\right).$$

这里及以后将用A表示与m、n、f无关的常数，但各处的数值未必相同。

例2　设$D_1=[-1,1]\times[-1,1]$，$D_2=\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]\times\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$，$\{P_k(x)\}$是$[-1,1]$上满足$P_k(1)=1$的Legendre多项式序列。假设$P_{2n}(x)$的最小的二个正零点为$a_{2n}$和$a_{2n-1}$。置

$$R_n(x)=C_n\cdot\left(\frac{P_{2n}(x)}{(x^2-a_{2n}^2)(x^2-a_{2n-1}^2)}\right),$$

其中取C_n，使$\int_{-1}^{1}R_n(x)dx=1$。此外，再设$P_k(x)$的零点为$-1<x_{1,k}<x_{2,k}<\cdots<x_{k,k}<1$，$\{\lambda_{\nu,k}\}_{\nu=1}^{k}$是相应的Cotes数[5]。对于$f(x,y)\in C(D_1)$，我们引入二维插值型算子：

$$K_{m,n}(f(u,v))(x,y)=\frac{1}{4}\sum_{\mu=1}^{2m}\sum_{\nu=1}^{2n}\lambda_{\mu,2m}\lambda_{\nu,2n}f(x_{\mu,2m},\ y_{\nu,2n})R_m\left(\frac{x_{\mu,2m}-x}{2}\right)R_n\left(\frac{y_{\nu,2n}-y}{2}\right).$$

那么，利用[6]和系1.2，可以证得：对于任何$f\in C(D_1)$，

$$\|K_{m,n}(f)-f\|_2\leqslant A\left\{\|f\|_2\cdot\left(\frac{1}{n^4}+\frac{1}{m^4}\right)+\omega\left(f,\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\right\}.$$

这个结果是[6]的推广。此外，若$D_2=[-1+\delta,\ 1-\delta]\ (\delta>0)$，上述结论仍然成立。

§2　线性正算子序列L^p逼近的阶

定理2.1　设$D=[0,\ 1)\times[0,\ 1)$，$L^p(D)\ (1<p<+\infty)$表示各分量分别以1为周期且在D上p幂可积的函数空间，$\{K_n(\cdot,X)\}$是$L^p(D)\longmapsto L^p(D)$的一致有界的线性正算子序列。假如$K_n(1,X)$，$K_n(u,X)$，$K_n(v,X)$，$K_n(u^2,X)$，$K_n(v^2,X)$均属于$C(D)$，那么，对于任何$f\in L^p(D)$有

$$\|K_n(f,X)-f(X)\|_p\leqslant A\{\mu_n\cdot\|f\|_p+\omega_2(f,\ \sqrt{\mu_n})_p\},\tag{4}$$

其中$X=(x,y)$，

$$\omega_2(f,\delta)_p=\sup_{0<t\leqslant\delta}\ \sup_{\substack{\max_i|\alpha_i|=1\\ \alpha_i=0,\pm1}}\|f(x+\alpha_1t,\ y+\alpha_2t)+f(x-\alpha_1t,\ y-\alpha_2t)-2f(x,y)\|_p,$$

$$\mu_n=\max\{\|K_n(1,X)-1\|_C,\ \|K_n(u,X)-x\|_C,\ \|K_n(v,X)-y\|_C$$
$$\|K_n(u^2,X)-x^2\|_C,\ \|K_n(v^2,X)-y^2\|_C\}.$$

对于 $D=[0,1)^3$，也有类似的结果。

定理2.1的证明与作者在[7]中所用的方法相仿，这里从略。

当 $K_n(1)$，$K_n(t_i)$，$K_n(t_i^2)$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 不是连续函数或者不能分别一致逼近1，x_i，x_i^2 时，定理2.1就不能应用了。这时，我们有

定理2.2 设 $G=[0,1)^m\subset \boldsymbol{R}^m$，$\{K_n(\cdot,x)\}$ 是 $L^p(G)\longmapsto L^p(G)$ $(1\leqslant p<+\infty)$ 的一致有界的线性正算子序列，那末，对于任何 $f\in L^p(G)$，有

$$\|K_n(f,x)-f(x)\|_p\leqslant A\{\mu_n^{\frac{2p}{2p+m-1}}\cdot\|f\|_p+\omega_2(f,\ \mu_n^{\frac{p}{2p+m-1}})_p\}. \tag{5}$$

其中 $L^p(G)$ 表示各分量分别以 1 为周期的 p 幂可积函数空间。

$$\omega_2(f,\delta)_p=\sup_{0<\zeta\leqslant\delta}\sup_{|\xi|=1}\|\Delta_2^{\zeta\xi}f(x)\|_p$$

$$=\sup_{0<\zeta\leqslant\delta}\sup_{|\xi|=1}\|f(x_1+\zeta\xi_1,\ x_2+\zeta\xi_2,\cdots,\ x_m+\zeta\xi_m)+f(x_1-\zeta\xi_1,\ x_2-\zeta\xi_2,\cdots,\ x_m-\zeta\xi_m)-2f(x_1,x_2,\cdots,x_m)\|_p,\quad \xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m),\quad \xi_i=0,\pm1,$$

$$|\xi|=\max_{1\leqslant i\leqslant m}|\xi_i|.$$

$$\mu_n=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{\|K_n(1,x)-1\|_p,\ \|K_n(|t_i-x_i|,x)\|_p\}.$$

证明 设 $f(x)\in L^p(G)$。置

$$g(x)=\frac{1}{h^{2m}}\underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\cdots\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}}_{2m\text{个}}f(x+\alpha+\beta)\,d\alpha_1\cdots d\alpha_m d\beta_1\cdots d\beta_m,$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\ \alpha_m)$，$\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\ \beta_m)$。

不难验证：

$$\|g\|_p\leqslant\|f\|_p,\quad \|f-g\|_p\leqslant\frac{1}{2}\omega_2\left(f,\frac{h}{2}\right)_p \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}=\frac{1}{h^{2m}}\underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\cdots\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}}_{2m-2\text{ 个}}\{f(x_1+\alpha_1+\beta_1,\cdots,\ x_i+h,\ x_{i+1}+\alpha_{i+1}+\beta_{i+1},\cdots,\ x_m+\alpha_m+\beta_m)$$
$$+f(x_1+\alpha_1+\beta_1,\cdots,\ x_i-h,\ x_{i+1}+\alpha_{i+1}+\beta_{i+1},\cdots,\ x_m+\alpha_m+\beta_m)$$
$$-2f(x_1+\alpha_1+\beta_1,\cdots,\ x_i,\ x_{i+1}+\alpha_{i+1}+\beta_{i+1},\cdots,\ x_m+\alpha_m+\beta_m)\}d\alpha_1\cdots d\alpha_{i-1}d\alpha_{i+1}\cdots d\alpha_m$$
$$\cdot d\beta_1\cdots d\beta_{i-1}d\beta_{i+1}\cdots d\beta_m. \tag{7}$$

由(6)式和 **Jenson** 不等式，可以证得：

$$\max_{\substack{0\leqslant x_j\leqslant 1\\ 1\leqslant j\leqslant m,\ j\neq i}}\int_0^1\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}\right|dx_i\leqslant\frac{1}{h^{m+1}}h^{\frac{m-1}{q}}\omega_2(f,h)_p\leqslant\omega_2(f,h)_p\Big/h^{2+\frac{m-1}{p}} \tag{8}$$

及

$$\left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}\right\|_p \leqslant \frac{1}{h^2}\omega_2(f,h)_p. \tag{9}$$

$$\max_{\substack{0\leqslant x_j\leqslant 1\\ 1\leqslant j\leqslant m,\ j\neq i}} \int_0^1 |g|\,dx_i \leqslant \|f\|_p \Big/ h^{\frac{m-1}{p}}. \tag{10}$$

由此可得

$$\max_{x\in G}\left|\frac{\partial g}{\partial x_i}\right| \leqslant h^{-\frac{m-1}{p}}\|f\|_p + h^{-2-\frac{m-1}{p}}\omega_2(f,h)_p, \tag{11}$$

$$\max_{x\in G}|g| \leqslant 2h^{-\frac{m-1}{p}}\|f\|_p + h^{-2-\frac{m-1}{p}}\omega_2(f,h)_p. \tag{12}$$

现在来证明定理：

$$\begin{aligned}&\|K_n(f,x)-f(x)\|_p \leqslant \|K_n(f,x)-K_n(g,x)\|_p + \|K_n(g,x)-g(x)\|_p\\ &+\|f(x)-g(x)\|_p \leqslant (1+\sup_n\|K_n\|)\|f-g\|_p + \|K_n(g,x)-g(x)\|_p\\ \leqslant{}&(1+\sup_n\|K_n\|)\omega_2(f,h)_p + \max_{x\in G}|g(x)|\cdot\|K_n(1,x)-1\|_p + \|K_p(g(t)-g(x),x)\|_p.\end{aligned} \tag{13}$$

利用m维时类似于以下的展开式$(m=2)$：

$$\begin{aligned}g(t)-g(x) ={}& (t_2-x_2)\frac{\partial g(t_1,x_2)}{\partial x_2} + \int_{t_2}^{x_2}(t_2-u)\,\frac{\partial^2 g(t_1,u)}{\partial u^2}du\\ &+(t_1-x_1)\frac{\partial g(x_1,x_2)}{\partial x_1} + \int_{t_1}^{x_1}(t_1-v)\frac{\partial^2 g(v,x_2)}{\partial v^2}dv,\end{aligned}$$

即可证得

$$\begin{aligned}&\|K_n(g(t)-g(x),\ x)\|_p \leqslant \max_{\substack{x\in G\\1\leqslant i\leqslant m}}\left|\frac{\partial g}{\partial x_i}\right|\cdot\sum_{i=1}^m\|K_n(|t_i-x_i|,\ x)\|_p\\ &+\max_{\substack{x\in G\\1\leqslant i\leqslant m}}\int_0^1\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}\right|dx_i\cdot\sum_{i=1}^m\|K_n(|t_i-x_i|,\ x)\|_p\\ &\leqslant A\mu_n\cdot(h^{-\frac{m-1}{p}}\cdot\|f\|_p + h^{-2-\frac{m-1}{p}}\omega_2(f,h)_p),\end{aligned} \tag{14}$$

取$h=\mu_n^{\frac{p}{2p+m-1}}$，由(13)、(14)式，即得(5)式．证毕．

§3 线性正算子序列的点收敛

设G表示$\mathbf{R}^m$的紧子集$[0,1]^m$．根据O. Shisha和B. Mond[1]的证明，已经有

定理S 设$\{K_n(\cdot,x)\}$是$C(G)\longmapsto C(G)$的线性正算子序列，如果对于$x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in G$，满足

1） $\lim\limits_{n\to+\infty}K_n(1,x)=1$，

2） $\lim\limits_{n\to+\infty}K_n(t_i,x)=x_i$，

3） $\lim\limits_{n\to+\infty}K_n(t_i^2,x)=x_i^2$，$i=1,2,\cdots,m$．

则对于任何 $f\in C(G)$，在点 x 处有

$$\lim_{n\to+\infty}K_n(f,x)=f(x).$$

我们研究可积函数用正算子序列逼近的几乎处处收敛性，得到了

定理3.1 设 $\{K_n(\cdot,x)\}$ 是 $L^p(G)\longmapsto L^p(G)$（$1\leqslant p<+\infty$）的线性正算子的单调序列，即对于任何 $f(x)\in L^p(G)$，且满足 $f(x)\geqslant 0\,(a.e.)$ 的函数，恒有

$$0\leqslant K_1(f,x)\leqslant K_2(f,x)\leqslant\cdots\leqslant K_n(f,x)\leqslant\cdots\ (a.e.)\tag{15}$$

假设定理 S 的条件1)、2)、3) 在 G 上几乎处处成立，并且 $M=\sup\limits_n\|K_n\|<+\infty$，那末，对于任何 $f\in L^p(G)$ 有

$$\lim_{n\to\infty}K_n(f,x)=f(x)\quad(a.e.\ x\in G).$$

证明 设 $f(x)\in L^p(G)$，置

$$F_k\overset{\text{def}}{=}\left\{x\in G\text{：存在无穷多个 }m'\text{，使 }|K_{m'}(f,x)-f(x)|\geqslant\frac{2}{k}\right\},\ k=1,2,\cdots.$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}K_n(f,x)=f(x)$ 不成立的点集为 $F=\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}F_k$。所以，我们只要证明 $\text{mes}F_k=0$（$k=1$，2，$\cdots$）。

设 $\eta>0$ 是任意给定的数。取 $g(x)\in C(G)\cap L^p(G)$，使 $\|f-g\|_p<\eta$。若记

$$E=\{x\in G:\ \lim_{n\to+\infty}K_n(g,x)=g(x)\}.$$

根据假设和定理 S，有 $\text{mes}(G-E)=0$。

设 $x\in E\cap F_k$，则存在 $m_1<m_2<\cdots<m_j<\cdots$ 使

$$\frac{2}{k}\leqslant|K_{m_j}(f,x)-f(x)|\leqslant|K_{m_j}(h,x)-h(x)|+|K_{m_j}(g,x)-g(x)|,$$

其中 $h(x)=f(x)-g(x)$。因为 $x\in E$，所以当 m_j 充分大时，

$$|K_{m_j}(g,x)-g(x)|<\frac{1}{k},$$

这时

$$\frac{1}{k}\leqslant|K_{m_j}(h,x)-h(x)|\leqslant|K_{m_j}(h,x)|+|h(x)|.$$

所以，

$$x\in\left\{x\in G:|K_{m_j}(h,x)|\geqslant\frac{1}{2k}\right\}\cup\left\{x\in G:\ |h(x)|\geqslant\frac{1}{2k}\right\},$$

$$x\in\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left\{x\in G:\ |K_n(h,\ x)|\geqslant\frac{1}{2k}\right\}\cup\left\{x\in G:\ |h(x)|\geqslant\frac{1}{2k}\right\}.$$

注意到 $\{K_n(\cdot,x)\}$ 是线性正算子的单调序列，所以

$$\begin{aligned}\text{mes}(E\cap F_k)&\leqslant\text{mes}\,\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left\{x\in G:\ K_n(|h|,\ x)\geqslant\frac{1}{2k}\right\}+\text{mes}\left\{x\in G:\ |h(x)|\geqslant\frac{1}{2k}\right\}\\&=\lim_{n\to+\infty}\text{mes}\left\{x\in G:\ K_n(|h|,\ x)\geqslant\frac{1}{2k}\right\}+\text{mes}\left\{x\in G:\ |h(x)|\geqslant\frac{1}{2k}\right\}.\end{aligned}$$

利用 L^p 上的弱性不等式[8]，即得

$$\mathrm{mes}(E\cap F_k)\leqslant\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\|K_n(|h|,x)\|_p}{\frac{1}{2k}}\right)^p+\left(\frac{\|h\|_p}{\frac{1}{2k}}\right)^p\leqslant(1+M^p)\cdot(2k\eta)^p.$$

由于 η 可以任意小，所以 $\mathrm{mes}(E\cap F_k)=0$。注意到 $\mathrm{mes}(G-E)=0$，就证得 $\mathrm{mes}F_k=0$。证毕。

定理 3.1 就是几乎处处收敛的 Коловкин 型定理。从定理的证明可以看出：对于 $G=\boldsymbol{R}^m$，类似的结论也成立。

参 考 文 献

[1] Shisha, O. and Mond, Г., The degree of convergence of sequences of linear positive operators., *Proc. Nat. Acad. Soc.* U. S. A. 60(1968)1196—1200.

[2] Berens, H. and DeVore, R. A., Quantitative Korovkin theorem for L_p-spaces., "Approximation Theory Ⅱ", Ed by G. G. Lorentz (1976)289—298.

[3] 谢敦礼，连续正算子序列逼近的阶 杭州大学学报 4(1681)363—367.

[4] ГоНчаров, В. Л., Теория интерполирования и приближения функций., ГИТЛ. Москва. 1954.

[5] Szegö, G., Orthogonal Polynomials., *Amer. Math. Soc.* Coll. Publ., 1967.

[6] Swetits, J. I. and Wood, B., Approximation by Discrete Operators., *J. Approximation. T.* 24 (1978)310—323.

[7] 谢敦礼，Канторович 多项式 L^p 逼近的阶，科学通报 24(1983)1476—1479.

[8] Stein, E. M. and Weiss, G., Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces., Princeton, New Jersey, 1975.

Some Results on the Approximation of Functions by the Sequences of Positive Linear Operators

Xie Dun-li

Abstract

In this paper we consider the degree of approximation of continuous function and intergrable function on the space with dimension $m\geqslant 2$ by the sequences of positive linear operators. Besides, we prove the Kolovkin type theorem for pointwise convergence of the sequences of positive linear operators.