第5卷 第2期
1985年4月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.5 No.2
April 1985

马氏链的离散分布(II)*

帅元祖

(西安交大数学系)

设$X(\omega)=\{x(t,\omega),\ t\geqslant 0\}$是定义在完备概率空间$(\Omega,\mathscr{F},p)$上的马氏链。其状态空间$I=\{0,1,2,\cdots\}$. 如不作特别声明都假定$X(\omega)$具有标准转移矩阵，完全可分，Borel可测，状态稳定。令

$$\beta_E(\omega)=\sup\{t:\ t\geqslant 0,\ x(t,\omega)\in E\} \quad \text{如右方集非空}$$
$$=0 \quad \text{如上方集空} \tag{1}$$

$$\beta_E(m,\omega)=\sup\left\{\frac{n}{2^m}:\ n=0,1,2,\cdots;\ x\left(\frac{n}{2^m},\ \omega\right)\in E\right\} \quad \text{如右方集非空}$$
$$=0 \quad \text{如上方集空} \tag{2}$$

$${}_E\beta_H(\omega)=\beta_H(\omega) \quad \text{如 } 0<\beta_H(\omega)<\tau_E(\omega)$$
$$=0 \quad \text{否则} \tag{3}$$

$${}_E\gamma_H(\omega)=\beta_H(\omega) \quad \text{如 } 0<\beta_H(\omega)<\beta_E(\omega)$$
$$=0 \quad \text{否则} \tag{4}$$

$${}_E\Delta_H(\omega)=\tau_H(\omega) \quad \text{如 } \tau_H(\omega)<\beta_E(\omega)$$
$$=\infty \quad \text{否则} \tag{5}$$

关于$\tau_A(\omega)$的定义见[1]. 称$\beta_E(\omega)$为集合E的末离时. 称${}_E\beta_H(\omega)$为首中E之前H的末离时. 称${}_E\gamma_H(\omega)$为末离E之前的H的末离时. 称${}_E\Delta_H(\omega)$为末离E之前的H的首中时. 显然用类似的方法可以定义${}_E\beta_H(m,\omega)$、${}_E\gamma_H(m,\omega)$、${}_E\Delta_H(m,\omega)$. 如果在定义中用s代替2^{-m}，则得到$\beta_E(s,\omega)$、${}_E\beta_H(s,\omega)$、${}_E\gamma_H(s,\omega)$、${}_E\Delta_H(s,\omega)$. 显然它们都是随机变数. 从而由$X(\omega)$的Borel可测性知$x(\beta_E(\omega),\omega)$、$x(\beta_E(s,\omega),\omega)$、$x({}_E\beta_H(\omega),\omega)$, $x({}_E\beta_H(s,\omega),\omega)$、$x({}_E\gamma_H(\omega),\omega)$, $x({}_E\gamma_H(s,\omega),\omega)$、$x({}_E\Delta_H(s,\omega),\omega)$、$x({}_E\Delta_H(s,\omega),\omega)$是随机变数. 本文的结果是给出这些随机变数关于时间和位置的分布.

末离时的概念是首先由钟开莱教授引入的. 这可以从钟先生1973年关于布朗运动的文章中见到. (参看[9]所引的文献.) 本文把这个概念移植到马氏链中. 计算出了$\beta_E(\omega)$关于时间和位置的分布. ${}_E\beta_H(\omega)$、${}_E\gamma_H(\omega)$、${}_E\omega_H(\omega)$都是首次引入.

本文使用的方法是离散逼近的方法. 这是钟教授在1960年提出的. 它的特点是概率意

*1982年2月18日收到.

义清楚。但是难度较大。

本文最后用与[1]不同的方法，计算出 ${}_{\mathrm{E}}\tau_{\mathrm{H}}(\omega)$ 关于时间和位置的联合分布。

一 $\beta_{\mathrm{E}}(\omega)$ 和 ${}_{\mathrm{E}}\beta_{\mathrm{H}}(\omega)$ 的分布

引理1 对于概率 1 的 ω

$$\lim_{m\to\infty}\beta_{\mathrm{E}}(m,\omega)=\beta_{\mathrm{E}}(\omega). \tag{6}$$

引理2 存在 $G\subset\{\omega:\ 0<\beta_{\mathrm{E}}(\omega)<\infty\}$ 使 $p_i\{\omega:\ 0<\beta_{\mathrm{E}}(\omega)<\infty\}=p_i(G)\qquad(i\in I)$，当 $\omega\in G$ 时

$$\lim_{m\to\infty}x(\beta_{\mathrm{E}}(m,\omega),\omega)=x(\beta_{\mathrm{E}}(\omega)-0,\omega). \tag{7}$$

当 $X(\omega)$ 被进一步假定为左下半连继时，(7) 的右端可以去掉 -0 记号。为了书写方便在应该考虑 $x(\beta_{\mathrm{E}}(\omega)-0,\omega)$ 的时候也写成 $x(\beta_{\mathrm{E}}(\omega),\omega)$。并把 $\beta_{\mathrm{E}}(\omega)$ 的位置分布看成是

$$p_i\{0<\beta_{\mathrm{E}}(\omega)<\infty,\ x(\beta_{\mathrm{E}}(\omega)-0,\omega)=j\}\ (i,j\in I),$$

对于其他的随机变数 ${}_{\mathrm{E}}\beta_{\mathrm{H}}(\omega)$、${}_{\mathrm{E}}\gamma_{\mathrm{H}}(\omega)$、${}_{\mathrm{E}}\Delta_{\mathrm{H}}(\omega)$、${}_{\mathrm{E}}\tau_{\mathrm{H}}(\omega)$ 也作相应的处理，以后不再随处声明。

定义由 $X(\omega)$ 产生的中断马氏链

$${}^{N}X(\omega)=\begin{cases}{}^{N}x(t,\omega)=x(t,\omega) & 0\leqslant t\leqslant N\\ {}^{N}x(t,\omega)=\theta & \theta\overline{\in} I\cup\{\infty\},\ 0<N<t<\infty.\end{cases} \tag{8}$$

引理3 对于任意的 $i\in I$, $j\in E$

$$\lim_{m\to\infty}p_i\{0<\beta_{\mathrm{E}}(m,\omega),\ {}^{N}x(\beta_{\mathrm{E}}(\omega),\omega)=j\}=p_i\{0<\beta_{\mathrm{E}}(\omega),\ {}^{N}x(\beta_{\mathrm{E}}(\omega),\ \omega)=j\}. \tag{9}$$

定理1 设 $X(\omega)$ 的密度矩阵保守。则

$$p_i\{0<\beta_{\mathrm{E}}(\omega)<t,\ x(\beta_{\mathrm{E}}(\omega),\omega)=j\}=\sum_{k\in\widetilde{E}}\int_0^t p_{ij}(u)q_{jk}u_{k\widetilde{E}}du\quad(i\in I,\ j\in E), \tag{10}$$

其中 $U_{k\widetilde{E}}=\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{l\in\widetilde{E}}{}_{E}p_{kl}(N)\qquad(k\in\widetilde{E})$。

当过程是常返的时候 $U_{k\widetilde{E}}=0$ ($\widetilde{E}=I\backslash E=E^{C}$)。

证 由于

$$p_i\{0<\beta_{\mathrm{E}}(s,\omega)<t<N,\ {}^{N}x(\beta_{\mathrm{E}}(s,\omega),\omega)=j\}$$

$$=\sum_{k\in\widetilde{E}}\sum_{l\in\widetilde{E}}\int_s^{[t\widetilde{s}^{-1}]s+s}p_{ij}^{([us^{-1}])}(s)\frac{1}{s}p_{ik}(s)\,{}_{\mathrm{E}}\widetilde{p}_{kL}^{([Ns^{-1}]-[us^{-1}]-1)}(s)du \tag{11}$$

记号 $[Bs^{-1}]$ 表示当 Bs^{-1} 为整数时 $[Bs^{-1}]=Bs^{-1}-1$；当 Bs^{-1} 不为整数时 $[Bs^{-1}]=[Bs^{-1}]$。故，由 (11) 知

$$\lim_{\substack{s\to 0\\ s=2^{-m}}}p_i\{0<\beta_{\mathrm{E}}(s,\omega)<t<N,\ {}^{N}x(\beta_{\mathrm{E}}(s,\omega),\omega)=j\}$$

$$=p_i\{0<\beta_{\mathrm{E}}(\omega)<t<N,\ {}^{N}x(\beta_{\mathrm{E}}(\omega),\omega)=j\}=\sum_{k\in\widetilde{E}}\sum_{l\in\widetilde{E}}\int_0^t p_{ij}(u)q_{jk}\,{}_{\mathrm{E}}p_{kl}(N-u)du, \tag{12}$$

又因

$$\lim_{N\to\infty} p_i\{(0<\beta_E(\omega)<t<N,\ {}^N x(\beta_E(\omega),\omega)=j\}=p_i\{(0<\beta_E(\omega)<t,\ x(\beta_E(\omega),\omega)=j\} \tag{13}$$

由引理3、(12)、(13)和控制收敛定理就知(10)得证。(证完)

推论1 $p_i\{0<\beta_E(\omega)<t\}=\sum_{j\in E}\sum_{k\in\tilde{E}}\int_0^t p_{ij}(\nu)q_{jk}u_{k\tilde{E}}d\nu\quad(i\in\mathbf{I},\ t>0.)$ (14)

当过程常返时

$$p_i\{\beta_E(\omega)=\infty\}=1,\ (i\in\mathbf{I}) \tag{15}$$

推论2 设马氏链非常返，则

$$p_i\{0<\beta_E(\omega)<\infty,\ x(\beta_E(\omega),\ \omega)=j\}=\sum_{k\in\tilde{E}}\int_0^\infty p_{ij}(\nu)q_{jk}u_{k\tilde{E}}d\nu\quad(i\in\mathbf{I},j\in E) \tag{16}$$

引理4 设$X(\omega)$是非常返马氏链。其密度矩阵保守。则

$$p_i\{0<{}_E\beta_H(\omega)<t,\ \tau_E(\omega)=\infty,\ x({}_E\beta_H(\omega),\ \omega=j\}=j\}=\sum_{k\in\widetilde{E\cup H}}\int_0^t {}_Ep_{ij}(u)q_{jk}U_{k\widetilde{E\cup H}}du$$

$$(i\in\tilde{E},j\in H). \tag{17}$$

引理5 对于任意的$t>0$

$$\lim_{m\to\infty}p_i\{0<{}_E\beta_H(m,\omega)<t,\ {}^N x({}_E\beta_H(m,\omega=j\}$$
$$=p_i\{0<{}_E\beta_H(\omega)<t,\ {}^N x({}_E\beta_H(\omega),\ \omega)=j\}\quad(i,j\in\mathbf{I}). \tag{18}$$

定理2 设$X(\omega)$是非常返马氏链，密度矩阵保守，满足向前方程。则

$$p_i\{0<{}_E\beta_H(\omega)<t,\ x({}_E\beta_H(\omega),\omega)=j\}=\sum_{k\in E}\int_0^t {}_Ep_{ij}(\nu)q_{jk}U_{k\tilde{H}}d\nu+\sum_{k\in\widetilde{E\cup H}}\int_0^t {}_Ep_{ij}(\nu)q_{jk}U_{k\widetilde{E\cup H}}d\nu+\sum_{m\in\widetilde{E\cup H}}\sum_{n\in\widetilde{E\cup H}}\sum_{k\in E}\int_0^t {}_Ep_{ij}(u)q_{jm}du\int_0^\infty {}_{E\cup H}p_{mn}(\nu)q_{nk}u_{k\tilde{H}}d\nu\quad(i\in\tilde{E},\ j\in H) \tag{19}$$

$=0\quad(i\in E,\ j\in\mathbf{I}$或$i\in\tilde{E},\ j\in\tilde{H})$.

证 由于

$$\begin{aligned}
&p_i\{0<{}_E\beta_H(s,\ \omega)<t<N,\ {}^N x({}_E\beta_H(s,\ \omega),\ \omega)=j\}\\
&\qquad=p_i\{0<{}_E\beta_H(s,\ \omega)<t<N,\ \tau_E(s,\ \omega)=\infty,\ x({}_E\beta_H(s,\ \omega,\ \omega)=j\}\\
&\qquad+P_i\{0<{}_E\beta_H(s,\ \omega)<t<N,\ \tau_E(s,\ \omega)<\infty,\ {}^N x({}_E\beta_H(s,\ \omega),\ \omega)=j\}\\
&\qquad=I_1(s,\ N)+I_2(s,\ N),\\
&\tilde{I}_2(s,\ N)=p_i\{0<{}_E\beta_H(s,\ \omega)<t<N,\ \tau_E(s,\ \omega)\leqslant N,\ {}^N x({}_E\beta_H(s,\ \omega),\ \omega)=j\}
\end{aligned}$$

$$=\sum_{a=1}^{[t\tilde{s}^{-1}]}{}_Ep_{ij}^{(a)}(s)\sum_{k\in E}p_{jk}(s)\sum_{l\in\tilde{E}}{}_Hp_{kl}^{([Ns^{-1}]-a-1)}(s)$$

$$+\sum_{a=1}^{[t\tilde{s}^{-1}]}\sum_{a_1=0}^{[Ns^{-1}]-a-2}{}_Ep_{ij}^{(a)}(s)\sum_{m\in\widetilde{E\cup H}}p_{jm}(s)\sum_{n\in\widetilde{E\cup H}}{}_{E\cup H}p_{mn}^{(a_1)}(s)\sum_{k\in E}p_{nk}(s)\sum_{l\in\tilde{H}}{}_Hp^{([Ns^{-1}]-a-a_1-2)}(s)$$

$=I_3(s,\ N)+I_4(s,\ N)$,

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{s\to 0}I_2(s,\ N)=\sum_{k\in E}\int_0^t {}_Ep_{ij}(u)q_{jk}u_{k\tilde{H}}du,$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{s\to 0} I_4(s,N)=\sum_{m\in\widetilde{E\cup H}}\sum_{n\in\widetilde{E\cup H}}\sum_{k\in E}\int_0^t {}_{E}p_{ij}(u)q_{jm}du\int_0^\infty {}_{E\cup H}p_{mn}(v)q_{nk}u_{k\tilde{H}}dv,$$

因此

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{s\to 0} I_2(s,N)=\lim_{N\to\infty}\lim_{s\to 0}\tilde{I}_2(s,N)$$

$$=\sum_{m\in\widetilde{E\cup H}}\sum_{n\in\widetilde{E\cup H}}\sum_{k\in E}\int_0^t {}_{E}p_{ij}(u)q_{jm}du\int_0^\infty {}_{E\cup H}p_{mn}(v)q_{nk}u_{k\tilde{N}}dv+\sum_{k\in E}\int_0^t {}_{E}p_{ij}(u)q_{jk}u_{k\tilde{H}}du$$

$$(i\in\tilde{E},\ j\in H). \tag{20}$$

由引理4， $\lim_{n\to\infty}\lim_{s\to 0} I_1(s,N)=\sum_{k\in\widetilde{E\cup H}}\int_0^t {}_{E}p_{ij}(u)q_{jk}u_{k\widetilde{E\cup H}}du \quad (i\in\tilde{E},\ j\in H),$ (21)

由引理5， $\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} p_i\{0<{}_{E}\beta_H(m,\omega)<t<N,\ {}^{N}x({}_{E}\beta_H(m,\omega),\omega)=j\}$

$$=p_i\{<0<{}_{E}\beta_H(\omega)<t,\ x({}_{E}\beta_H(\omega),\omega)=j\}, \tag{22}$$

故由（20）—（21）就知（19）得证。（证完）

推论 在定理2的条件下

$$p_i\{0<{}_{E}\beta_H(\omega)<t\}=\sum_{j\in H}\sum_{k\in E}\int_0^t {}_{E}p_{ij}(v)q_{jk}u_{k\tilde{H}}dv+\sum_{j\in H}\sum_{k\in\widetilde{E\cup H}}\int_0^t {}_{E}p_{ij}(v)q_{jk}u_{k\widetilde{E\cup H}}dv$$

$$+\sum_{m\in\widetilde{E\cup H}}\sum_{n\in\widetilde{E\cup H}}\sum_{k\in E}\sum_{j\in H}\int_0^t {}_{E}p_{ij}(u)q_{jm}du\int_0^\infty {}_{E\cup H}p_{mn}(v)q_{nk}u_{k\tilde{H}}dv \quad (i\in\tilde{E}), \tag{23}$$

$$p_i\{0<{}_{E}\beta_H(\omega)<\infty,\ x({}_{E}\beta_H(\omega),\ \omega)=j\}=\sum_{k\in E}\int_0^\infty {}_{E}p_{ij}(v)q_{jk}u_{k\tilde{H}}dv+\sum_{k\in\widetilde{E\cup H}}\int_0^\infty {}_{E}p_{ij}(v)q_{jk}u_{k\widetilde{E\cup H}}dv$$

$$+\sum_{m\in\widetilde{E\cup H}}\sum_{n\in\widetilde{E\cup H}}\sum_{k\in E}\int_0^\infty {}_{E}p_{ij}(u)q_{jm}du\int_0^\infty {}_{E\cup H}p_{mn}(v)q_{nk}u_{k\tilde{H}}dv \quad (i\in\tilde{E},\ j\in H). \tag{24}$$

二 ${}_{E}\gamma_H(\omega)$ 和 ${}_{E}\Delta_H(\omega)$ 的分布

引理6 对于任意的 $t>0$，

$$\lim_{m\to\infty} p_i\{0<{}_{E}\gamma_H(m,\omega)<t<N,\ {}^{N}x({}_{E}\gamma_H(m,\omega),\ \omega)=j\}$$

$$=p_i\{0<{}_{E}\gamma_H(\omega)<t<N,\ {}^{N}x({}_{E}\gamma_H(\omega),\ \omega)=j\}.$$

引理7 $\{\omega;\beta_E(\omega)=\infty\}\doteq\lim_{M\to\infty}\bigcup_{r\in R\cap[M,\infty)}\{x(r,\omega)\in E\}.$ (25)

引理8 $\lim_{M\to\infty}\lim_{m\to\infty}\lim_{N\to\infty} p_i\{0<{}_{E}\gamma_H(m,\omega)<t<M<N,\bigcup_{a=[M2^m]}^{[N2^m]}\{x(a2^{-m},\omega)\in E\}$

$${}^{N}x({}_{E}\gamma_H(m,\omega),\ \omega)=j\}=p_i\{0<{}_{E}\gamma_H(\omega)<t,\ \beta_E(\omega)=\infty,\ x({}_{E}\gamma_H(\omega),\ \omega)=j\}$$

$$=p_i\{0<\beta_H(\omega)<t,\ \beta_E(\omega)=\infty,\ x(\beta_H(\omega),\ \omega)=j\}.$$

引理9 设 $X(\omega)$ 是非常返马氏链，密度矩阵保守，满足向前方程。则

$$p_i\{0<{}_E\gamma_H(\omega)<t,\ \beta_E(\omega)=\infty,\ x({}_E\gamma_H(\omega),\ \omega)=j\}=\sum_{k\in\widetilde{H}}\int_0^t p_{ij}(u)q_{jk}D_{kH}du,$$

$$(i\in I,\ j\in H,\ t>0)\tag{26}$$

其中

$$\mathbf{D}_{kH}=\lim_{M\to\infty}\left(\sum_{l\in E}{}_Hp_{kl}(M)u_{l\widetilde{H}}+\sum_{l\in\widetilde{E\cup H}}{}_Hp_{kl}(M)\int_0^\infty\sum_{l\in\widetilde{E\cup H}}\sum_{n\in E}{}_{E\cup H}p_{lm}(u)q_{mn}u_{n\widetilde{H}}du\right).\tag{27}$$

定理3　设 $X(\omega)$ 是非常返马氏链，密度矩阵保守，满足向前方程，则

$$p_i\{0<{}_E\gamma_H(\omega)<t,\ x({}_E\gamma_H(\omega),\ \omega)=j\}$$

$$=\sum_{m\in\widetilde{H}}\sum_{n\in E}\sum_{k\in\widetilde{E\cup H}}\int_0^t p_{ij}(u)q_{jm}\int_0^\infty{}_Hp_{mn}(v)q_{nk}u_{k\widetilde{E\cup H}}dvdu+\sum_{k\in\widetilde{H}}\int_0^t p_{ij}(u)q_{jk}\mathbf{D}_{kH}du$$

$$(i\in I,\ j\in H).\tag{28}$$

证　由于　$p_i\{0<{}_E\gamma_H(s,\omega)<t<N,\ \beta_E(s,\omega)\leqslant N-1,\ {}^Nx({}_E\gamma_H(s,\omega),\ \omega)=j\}$

$$=\sum_{\alpha=1}^{[t\widetilde{s}^{-1}]}p_i\{\beta_H(s,\omega)=\alpha s,\ \beta_E(s,\omega)=(\alpha+1)s,\ {}^Nx(\beta_H(s,\omega),\ \omega)=j\}$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{[t\widetilde{s}^{-1}]}p_i\{\beta_H(s,\omega)=\alpha s,\ (\alpha+1)s<\beta_E(s,\omega)\leqslant N-1,\ {}^Nx(\beta_H(s,\omega),\omega)=j\}$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{[t\widetilde{s}^{-1}]}p_{ij}^{(\alpha)}(s)\sum_{m\in E}p_{jm}(s)\sum_{n\in\widetilde{E\cup H}}{}_{E\cup H}p_{mn}^{([Ns^{-1}]-\alpha-1)}(s)$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{[ts^{-1}]}\sum_{\alpha_1=1}^{[Ns^{-1}]-\alpha-2}p_{ij}^{(\alpha)}(s)\sum_{m\in\widetilde{H}}p_{jm}(s)\sum_{n\in E}{}_Hp_{mn}^{(\alpha_1)}(s)\sum_{k\in\widetilde{E\cup H}}p_{nk}(s)\sum_{l\in\widetilde{E\cup H}}{}_{E\cup H}p_{kl}^{([Ns^{-1}]-\alpha-\alpha_1-2)}(s)$$

$$=I_1(s,N)+I_2(s,N),\tag{29}$$

故

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{s\to0}I_1(s,N)=\sum_{m\in E}\int_0^t p_{ij}(u)q_{jm}u_{m\widetilde{E\cup H}}du=0,\tag{30}$$

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{s\to0}I_2(s,N)=\sum_{m\in\widetilde{H}}\sum_{n\in E}\sum_{k\in\widetilde{E\cup H}}\int_0^t p_{ij}(u)q_{jm}\int_0^\infty{}_Hp_{mn}(v)q_{nk}u_{k\widetilde{E\cup H}}dvdu.\tag{31}$$

由引理 6 、引理9、(29)、(30) 和 (31) 就知 (28) 得证。(证完)

推论　在定理 3 的条件下，$p_i\{0<{}_E\gamma_H(\omega)<t\}$

$$=\sum_{j\in H}\sum_{m\in\widetilde{H}}\sum_{n\in E}\sum_{k\in\widetilde{E\cup H}}\int_0^t p_{ij}(u)q_{jm}\int_0^\infty{}_Hp_{mn}(v)q_{nk}u_{k\widetilde{E\cup H}}dvdu$$

$$+\sum_{j\in H}\sum_{k\in\widetilde{H}}\int_0^t p_{ij}(u)q_{jk}D_{kH}du\qquad(i\in I),\tag{32}$$

$$p_i\{0<{}_E\gamma_H(\omega)<\infty,\ x({}_E\gamma_H(\omega),\ \omega)=j\}$$

$$=\sum_{m\in\widetilde{H}}\sum_{n\in E}\sum_{k\in\widetilde{E\cup H}}\int_0^\infty p_{ij}(u)q_{jm}\int_0^\infty{}_Hp_{mn}(v)q_{nk}u_{k\widetilde{E\cup H}}dvdu$$

$$+\sum_{k\in\widetilde{H}}\int_0^{\infty}p_{ij}(u)q_{jk}D_{kH}du\quad(i\in 1,\ j\in H).\tag{33}$$

引理10 $\lim\limits_{M\to\infty}\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{N\to\infty}p_i\left\{\tau_H(m,\omega)<t<M<N,\ \bigcup\limits_{a=[M2^m]}^{[N2^m]}\left\{x\left(\frac{a}{2^m},\omega\right)\in E\right\},{}^N x(\tau_H(m,\omega),\omega)\right.$

$\left.=j\right\}=p_i\{\tau_H(\omega)<t,\ \beta_E(\omega)=\infty,\ x(\tau_H(\omega),\omega)=j\}$

$=p_i\{{}_E\Delta_H(\omega)<t,\ \beta_E(\omega)=\infty,\ x({}_E\Delta_H(\omega),\omega)=j\}$.

引理11 设$X(\omega)$是非常返马氏链，密度矩阵保守，满足向前方程，则

$$p_i\{{}_E\Delta_H(\omega)<t,\ \beta_E(\omega)=\infty,\ x({}_E\Delta_H(\omega),\omega)=j\}=\sum_{k\in\widetilde{H}}\int_0^t{}_Hp_{ik}(u)q_{kj}D_{jE}du$$

$$(i\in\widetilde{H},j\in H),\tag{34}$$

其中

$$D_{jE}=\lim_{M\to\infty}\left(\sum_{l\in\widetilde{E}}p_{jl}(M)\int_0^{\infty}\sum_{m\in\widetilde{E}}{}_Ep_{lm}(v)\sum_{n\in\widetilde{E}}q_{mn}dv+\sum_{l\in E}p_{jl}(M)\right)$$

$$=\lim_{M\to\infty}\left(1-\sum_{l\in\widetilde{E}}p_{jl}(M)\,u_{l\widetilde{E}}\right)=(1-u_{j\widetilde{E}}).\tag{35}$$

引理12

$\lim\limits_{m\to\infty}p_i\{{}_E\Delta_H(m,\omega)<t<N,\ {}^Nx({}_E\Delta_H(m,\omega),\omega)=j\}=p_i\{{}_E\Delta_H(\omega)<t<N,{}^Nx({}_E\Delta_H(\omega),\omega)$

$=j\}$.

定理4 设$X(\omega)$是非常返马氏链，密度矩阵保守，满足向前方程，则

$$p_i\{{}_E\Delta_H(\omega)<t,\ x({}_E\Delta_H(\omega),\omega)=j\}$$

$$=\sum_{k\in\widetilde{H}}\sum_{l\in E}\sum_{m\in\widetilde{E}}\int_0^t{}_Hp_{ik}(u)q_{kj}du\int_0^t p_{jl}(v)q_{lm}u_{m\widetilde{E}}dv+\sum_{k\psi\widetilde{E}}\int_0^t{}_Np_{ih}(u)q_{kj}D_{jE}du,\ (i\in\widetilde{H},j\in H).\tag{36}$$

证 由强马氏性立知

$p_i\{{}_E\Delta_H(s,\omega)t<N<,\ \beta_E(s,\omega)\leqslant N,{}^Nx({}_E\Delta_H(s,\omega),\omega)=j\}$

$$=\sum_{k\in\widetilde{H}}\int_0^{[\widetilde{s}^{-1}]s}{}_Hp_i^{([u s^{-1}])}(s)\frac{1}{s}p_{kj}(s)p_j\{0<\beta_E(s,\omega)\leqslant(Ns^{-1}]-[us^-]-1)s\}du=I(s,\ N).\tag{37}$$

从而当s沿着$2^{-m}(m=1,2,3\cdots)$趋于0时成立

$$\lim_{s\to 0}I(s,\ N)=\sum_{k\in\widetilde{H}}\int_0^t{}_Hp_{ik}(u)q_{kj}p_j\{0<\beta_E(\omega)\leqslant N-u\}du.\tag{38}$$

对(38)的右端用控制收敛定理立知

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{s\to 0}I(s,N)=\sum_{k\in\widetilde{H}}\int_0^t{}_Hp_{ik}(u)q_{kj}p_j\{0<\beta_E(\omega)<\infty\}du.\tag{39}$$

由(39)、引理12和(16)就知

$$p_i\{{}_E\Delta_H(\omega)<t,\ \beta_E(\omega)<\infty,\ x({}_E\Delta_H(\omega),\omega=j\}$$

$$=\sum_{k\in\widetilde{H}}\sum_{l\in E}\sum_{m\in\widetilde{E}}\int_{\mathrm{H}}p_{ik}(u)q_{kj}du\int_0^{\infty}p_{jl}(v)q_{lm}u_{m\widetilde{E}}dv. \tag{40}$$

于是由（34）和（40）就知得所欲证．（证完）

推论　在定理的条件下：

$$p_i\{_{\mathrm{E}}\Delta_{\mathrm{H}}<t\}=\sum_{j\in H}\sum_{k\in\widetilde{H}}\int_0^t{}_{\mathrm{H}}p_{ik}(v)q_{kj}D_{jE}dv$$

$$+\sum_{j\in H}\sum_{k\in\widetilde{H}}\sum_{l\in E}\sum_{m\in\widetilde{E}}\int_0^t{}_{\mathrm{H}}p_{ik}(u)q_{kj}du\int_0^{\infty}p_{jl}(v)q_{lm}u_{m\widetilde{E}}dv\quad(i\in\widetilde{\mathrm{E}}), \tag{41}$$

$$p_i\{_{\mathrm{E}}\Delta_{\mathrm{H}}(\omega)<\infty,\ x(_{\mathrm{E}}\Delta_{\mathrm{H}}(\omega),\omega)=j\}$$

$$=\sum_{k\in\widetilde{H}}\sum_{l\in E}\sum_{m\in\widetilde{E}}\int_0^{\infty}{}_{\mathrm{H}}p_{ik}(u)q_{kj}du\int_0^{\infty}p_{jl}(v)q_{lm}u_{m\widetilde{E}}dv+\sum_{k\in\widetilde{H}}\int_0^{\infty}{}_{\mathrm{H}}p_{ik}(u)q_{kj}D_{jE}du\quad(i\in\widetilde{\mathrm{E}},j\in H). \tag{42}$$

三　$\tau_{\mathrm{E}}(\omega)$和$_{\mathrm{E}}\tau_{\mathrm{H}}(\omega)$ 的分布的另一算法

引理13

$$\lim_{m\to\infty}p_i\{\omega:\ _{\mathrm{E}}\tau_{\mathrm{H}}(m,\omega)<t<N,\ {}^Nx(_{\mathrm{E}}\tau_{\mathrm{H}}(m,\omega),\omega)=j\}$$

$$=p_i\{\omega:\ _{\mathrm{E}}\tau_{\mathrm{H}}(\omega)<t<N,\ {}^Nx(_{\mathrm{E}}\tau_{\mathrm{H}}(\omega),\omega)=j\}. \tag{43}$$

定理5　设$X(\omega)$满足向前方程，密度矩阵保守，(C)成立．则

$$p_i\{_{\mathrm{E}}\tau_{\mathrm{H}}(\omega)<t,\ x(_{\mathrm{E}}\tau_{\mathrm{H}}(\omega),\omega)=j\}=\sum_{k\in\widetilde{E\cup H}}\int_0^t{}_{E\cup H}p_{ik}(u)q_{kj}du\quad(i\in\widetilde{E\cup H},\ i\in H). \tag{44}$$

证　$p_i\{_{\mathrm{E}}\tau_{\mathrm{H}}(s,\omega)<t<N,\ \tau_{\mathrm{E}}(s,\omega)\leqslant N,\ {}^Nx(_{\mathrm{E}}\tau_{\mathrm{H}}(s,\omega),\omega)=j\}$

$$+p_i\{_{\mathrm{E}}\tau_{\mathrm{H}}(s,\omega)<t<N,\ \tau_{\mathrm{E}}(s,\omega)=\infty,\ {}^Nx(_{\mathrm{E}}\tau_{\mathrm{H}}(\omega),\omega)=j\}$$

$$=\sum_{a=0}^{[t\tilde{s}^{-1}]-1}\sum_{k\in\widetilde{E\cup H}}{}_{E\cup H}p_{ik}^{(a)}(s)p_{kj}(s)\sum_{a_1=0}^{[Ns^{-1}]-a-2}\sum_{l\in\widetilde{E}}{}_{\mathrm{E}}p_{j}^{(a_1)}(s)\sum_{m\in E}p_{lm}(s)$$

$$+\sum_{a=0}^{[t\tilde{s}^{-1}]-1}\sum_{k\in\widetilde{E\cup H}}{}_{E\cup H}p_{ik}^{(a)}(s)p_{kj}(s)\sum_{l\in\widetilde{D}}{}_{\mathrm{E}}p_{jk}^{([Ns^{-1}]-a-1)}(s)$$

$$=I_1(s,N)+I_2(s,N), \tag{44}$$

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{s\to 0}I_1(s,N)=\sum_{k\in\widetilde{E\cup H}}\sum_{l\in\widetilde{E}}\sum_{m\in E}\int_0^t{}_{E\cup H}p_{ik}(u)q_{kj}\int_0^{\infty}{}_{\mathrm{E}}p_{jl}(v)q_{lm}dvdu, \tag{45}$$

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{s\to 0}I_2(s,N)=\sum_{k\in\widetilde{E\cup H}}\int_0^t{}_{E\cup H}p_{ik}(u)q_{kj}u_{j\widetilde{E}}du. \tag{46}$$

由(44)—(46)就知

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{s\to 0}p_i\{_{\mathrm{E}}\tau_{\mathrm{H}}(s,\omega)<t<N,\ {}^Nx(_{\mathrm{E}}\tau_{\mathrm{H}}(s,\omega),\omega)=j\}=\sum_{k\in\widetilde{E\cup H}}\int_t^0{}_{E\cup H}p_{ik}(u)q_{kj}du. \tag{47}$$

由(47)和引理13就知得所欲证。(证完)

推论 $p_i\{\tau_E(\omega)<t,\ x(\tau_E(\omega),\omega)=j\}=\sum\limits_{k\in\widetilde{E}}\int_0^t {}_Ep_{ik}(u)q_{kj}du\quad (i\in\widetilde{E},\ j\in E)$. (48)

注：(C)条件：如 i 是非常返状态，j 是零常返状态，则假定成立 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{p_{ij}(t)}{p_{jj}(t)}=k$.

参 考 文 献

[1] 帅元祖，马氏链的离散分布，工程数学学报，1，1984.

[2] Chung, K. L., Markov Chains with Stationary Transition Probabilities, Springer-Verlag, 1960.

[3] Syski, R., Ergodic potential, *Stoch. Appl. Prob.* 7, 311—330(1978).

[4] Syski. R., Energy of Markov chains, *Adv. Appl. Prob.* 542—575(1979).

[5] Kemeny, J. G., Snell, J. L., Knapp, A. W., Denumevable Markov Chains. Springer-Verlag, (1976).

[6] 侯振挺、郭青峰，齐次可列马尔科夫过程，科学出版社 (1978).

[7] 王梓坤，生灭过程与马尔科夫链，科学出版社，1980.

[8] 王梓坤，布朗运动的末遇分布与极大游程，中国科学，10(1980).

[9] 王梓坤，布朗运动与牛顿位势，南开大学数学系，1980，11.

[10] 王梓坤，随机过程论，科学出版社，(1978).

[11] Chung, K. L., Brownian motion on the line, 数学研究与评论，创刊号 (1981).73-83.

[12] Shuai Yuan Zu, Discrete Approximation of Markov Chains.

Discrete Distributions of Markov Chains (Ⅱ)

Shuai Yuan-zu

Abstract

The concept of first hitting time and final hitting time are important in theory and application. In 1960 the first hitting time is led to Markov Chains by K. L. Chung. Then it is studyed by some mathematician. But they do not obtain joint distribution of time and place for the first hitting time. For Markov Chains the final hitting time is first leading into. The final hitting time of H before hitting E, the final hitting time of H before final hitting E, the first hitting time of H before final hitting E are first leading into. For they and the first hitting time of H before hitting E we obtain the joint distributions of time and place in this paper.