第5卷 第2期
1985年4月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.2
April 1985

关于一类随机矩阵特征根极限分布的注记*

白志东

（中国科学技术大学）

一 引 言

考虑 k 个 p 维总体 $X_1, X_2, \cdots, X_k$。假定它们都服从正态分布，其均值向量分别是 $(\xi_{1i}, \xi_{2i}, \cdots, \xi_{pi})$，$i=1,2,\cdots,k$，且具有共同的协方差矩阵 $\sum=(\sigma_{ij})$，$i,j=1,2,\cdots,p$。考虑矩阵

$$\xi=\begin{pmatrix} \xi_{11}, \xi_{21}, \cdots, \xi_{p1}, 1 \\ \xi_{12}, \xi_{22}, \cdots, \xi_{p2}, 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi_{1k}, \xi_{2k}, \cdots, \xi_{pk}, 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

如果 ξ 的秩为1，则说明 k 个总体的重心重合，如果 ξ 的秩为2，则说明这些重心共线等等。所以 ξ 的秩是多元统计中受关心的一个重要的数量。

现在我们假定从 k 个总体中分别抽取了大小为 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 的样本。记

$$\left.\begin{aligned} \xi_i &= \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{k} m_t \xi_{it}, \\ \psi_{ij} &= \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{k} m_t(\xi_{it}-\xi_i)(\xi_{jt}-\xi_j), \\ N &= \textstyle\sum_{t=1}^{k} m_t. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

显而易见，矩阵 (ψ_{ij}) 的秩恰比矩阵 ξ 的秩少1。其次，矩阵 (ψ_{ij}) 的秩恰好等于行列式方程

$$|(\psi_{ij}-\lambda\sigma_{ij})|=0 \tag{3}$$

的正特征根的个数。这样一来，研究 ξ 的秩的问题便转变成了研究(3)的正根个数，或者更广而言之，成了研究(3)的正根的问题了。

返回来再考虑已经抽定的 k 个样本。以 $(x_{1t}, \cdots, x_{pt})$ 表示第 t 个样本均值向量。以

* 1984年11月14日收到。推荐人：钟开莱（美国斯坦福大学）。

$(x_1,\cdots,x_p)$记总合样本均值向量，以(s_{ijt}) $i,j=1,2,\cdots,p$记第t个样本的样本协方差矩阵。又记

$$\bar{a}_{ij}=\sum_{t=1}^{k}m_t(x_{it}-x_i)(x_{jt}-x_j),$$
$$\bar{b}_{ij}=\sum_{t=1}^{k}(m_t)s_{ijt},$$
$$l_1=\min(p,k-1),$$
$$l_2=\max(p,k-1),$$

易见矩阵$(\bar{a}_{ij})$非负定且秩为l_1，当$N-k\geqslant p$时，矩阵$(\bar{b}_{ij})$是正定的。因此行列式方程

$$|(\bar{a}_{ij}-\phi\bar{b}_{ij})|=0 \tag{4}$$

恰有$p-l_1$个零根和l_1个实正根。

（4）的l_1个非零根在判别分析中起着十分重要的作用。它们的分布仅依赖于（3）的根。当（3）之根全为零时，其精确分布是已知的(见[1])。许宝騄教授在[2]中求得了这些正根的极限分布。即得到了

定理 设样本大小满足$m_t=mq_t$，$t=1,2,\cdots,k$。$q=\sum_{t=1}^{k}q_t$。$N=mq$(注意此时（3）之解与m无关)。设（3）具有不同正根$\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_\nu>0$，各有$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_\nu$重。记

$$a_0=0,\quad a_h=a_{h-1}+\mu_h,\quad h=1,2,\cdots,\nu,\quad r=a_\nu.$$

又记（4）之正根为$\phi_1\geqslant\phi_2\geqslant\cdots\geqslant\phi_{l_1}>0$。定义

$$\zeta_i=\sqrt{N}(2\lambda_h^2+4\lambda_h)^{-1/2}(\phi_i-\lambda_h),\quad (i=a_{h-1}+1,\cdots,a_h;\ h=1,2,\cdots,\nu)$$
$$\zeta_i=N\phi_i,\qquad (i=r+1,\cdots,l_1)$$

则当$m\to\infty$时，$\zeta_1,\cdots,\zeta_{l_1}$的极限分布密度是

$$D(\zeta_1,\cdots,\zeta_{a_1})D(\zeta_{a_1+1},\cdots,\zeta_{a_2})\cdots D(\zeta_{a_{\nu-1}}+1,\cdots,\zeta_{a_\nu})D_1(\zeta_{r+1},\cdots,\zeta_{l_1}) \tag{5}$$

其中

$$D(x_1\cdots x_\mu)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}\mu}\left(\prod_{i=1}^{\mu}\Gamma\left(\frac{i}{2}\right)\right)^{-1}\left\{\prod_{i=1}^{\mu}\prod_{j=i+1}^{\mu}(x_i-x_j)\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\mu}x_i^2\right\} \tag{6}$$

$$(\infty>x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_\mu>-\infty),$$

$$D_1(\zeta_{r+1},\cdots,\zeta_{l_1})=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}(p-r)(n_1-r)}\pi^{\frac{1}{2}(l_1-r)}\left\{\prod_{i=1}^{l_1-r}\Gamma\left(\frac{1}{2}l_2-\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{i}{2}\right)\right\}^{-1}$$
$$\times\left\{\prod_{i=r+1}^{l_1}\prod_{j=i+1}^{l_1}(\zeta_i-\zeta_j)\right\}\left\{\prod_{i=r+1}^{l_1}\zeta_i\right\}^{\frac{1}{2}(l_2-l_1-1)}\exp\left\{-\frac{1}{2}\prod_{i=r+1}^{l_1}\zeta_i\right\} \tag{7}$$

$$(\infty>\zeta_{r+1}\geqslant\cdots\geqslant\zeta_{l_1}\geqslant 0)(n_1=k-1).$$

前不久，梁文骐教授发现所用引理有错误，并给出了反例。由于[2]系多元统计分析中一著名文献，钟开莱教授建议撰写本文对这一定理的证明中起关键作用的引理3给以补救。

二 一个反例

为了说清这个反例，我们先将文[2]引理1引述如下：

设$Q_n(n=1,2,\cdots)$是有限维随机点，维数与n无关。又设其值域为Borel集E_n，$E_n\subset E_{n+1}$，$n=1,2,\cdots$，令

$$E=\lim_{n} E_n.$$

假定 Q_n 的分布函数收敛于一个连续的极限分布函数。$f_n(p)(n=1,2,\cdots)$ 是定义在 E_n 的上Borel可测实值点函数。假定

$$\lim_{n\to\infty} f_n(p)=0,\quad \forall p\in E.$$

则　　$f_n(Q_n)\to 0$ in $pr.$ $n\to\infty$.

例1　设 p_n 为第 n 个素数。$F_n=\left\{\frac{1}{p_n},\ \frac{2}{p_n},\cdots,\frac{p_n-1}{p_n}\right\}$.

$$f_n(p)=\begin{cases}1, & 若 p\in F_n,\\ 0, & 否则.\end{cases}$$

显然

$$f_n(p)\to 0,\quad \forall p\in(0,1).$$

定义 Q_n，服从分布如下，

$$P(Q_n<x)=\frac{k_n(x)}{2p_n}+\frac{p_n+1}{2p_n}\int_{-\infty}^{x} I_{(0,1)}(u)du,$$

式中 $k_n(x)$ 为 F_n 中小于 x 的元的个数。I_A 为集合 A 的示性函数，显然 Q_n 的分布趋于(0,1)上的均匀分布，$E_n=(0,1)=E$，但

$$P(f_n(Q_n)\geqslant 1)=P(Q_n\in F_n)=\frac{p_n-1}{2p_n}\to\frac{1}{2}.$$

事实上，对此例稍事修改，可以使所有 $f_n(p)$ 连续，Q_n 的分布绝对连续。引理结论仍然不成立，另一方面，倘若 Q_n 有密度 f_n，且 $f_n\to$ 某密度 f，则§1引理结论成立。因非本文重点，故从略。

三　许氏定理的证明

记 $n_1=k-1$，$n=N-k$，$v=N^{-\frac{1}{2}}$，

$$a_{ij}=\textstyle\sum_{\beta=1}^{n_1} y_{i\beta}y_{j\beta},\qquad u_{ii}=(\sum_{\gamma=1}^{n} z_{i\gamma}^2-N)/\sqrt{2N}$$

$$u_{ij}=(\textstyle\sum_{\gamma=1}^{n} g_{i\gamma}z_{j\gamma})/\sqrt{N},\quad i\neq j,\quad 1\leqslant i,\quad j\leqslant p. \tag{8}$$

在[2]中证明了(4)的解的分布与下面行列式方程解的分布相同。

$$|(v^2A+vC-v\phi U+D)|=0, \tag{9}$$

其中

$$A=(a_{ij}),\quad U=\begin{pmatrix}\sqrt{2}u_{11},\cdots,u_{1p}\\ \cdots\\ u_{p1},\cdots,\sqrt{2}u_{pp}\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}(\lambda_1-\phi)I_{\mu_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & (\lambda_\nu-\phi)I_{\mu_\nu} & \\ & & & -\phi I_{p-r}\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}C_{11}\cdots C_{1\nu} & E_1'\\ \vdots\quad\ \vdots & \vdots\\ C_{1\nu}\cdots C_{\nu\nu} & E_\nu^1\\ E_1\ \cdots E_\nu & 0\end{pmatrix},$$

$C_{hh}=\sqrt{\lambda_h}\,(y_{ij}+y_{ji})$，$(i,j=a_{h-1}+1,\cdots,a_h,h=1,2,\cdots,\nu)$

$C_{hg}=\sqrt{\lambda_h}\,(y_{ji}+\sqrt{\lambda_g}y_{ij})$，$(h\neq g,\ i=a_{h-1}+1,\cdots,a_h,j=a_{g-1}+1,\cdots,a_g)$

$E_h=\sqrt{\lambda_h}\,(y_{ij})$，$(i=r+1,\cdots,p,\ \ j=a_{h-1}+1,\cdots,a_h)$

而y_{ij},z_{ir}的分布函数密度为

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}(pn_1+n)}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_1}y_{ij}^2+\sum_{i=1}^{p}\sum_{\gamma=1}^{n}r_{i\gamma}^2\right)\right\}. \tag{10}$$

［2］中引理2，即关于全部u_{ij}渐近于独立的$N(0,1)$的结论，虽在其证明中使用了引理1，其结论之正确性易见，修改证明亦不难，可参看陈希孺［3］中的引理9及引理10。

以此引理2，［2］中便将诸u_{ij}换成了$iid\ N(0,1)$变量$\{W_{ij}\}$(虽然并未明说)。此事之容许性并非显见。为此我们需要下面的引理。

引理1　设d是一个正整数。Q_n，Q分别是$(R^d,\mathscr{B}(R^d))$上的概率测度，$Q_n\xrightarrow{W}Q$。则存在一个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$，在其上定义一列随机向量$\{X_n\}$及X，使得$X_n(\omega)\to X(\omega)$，$\forall\omega\in\Omega$且X_n,X的分布分别是Q_n和Q。

这个引理实际上可以推广到完备度量空间上的收敛测度序列，由于证明较长及有很有趣的应用，我们将另文给出(见［4］)。

利用这个引理，我们可以在某个概率空间上定义$(\tilde{u}_{ij},\ w_{ij},\ i,j=1,2,\cdots,p)$，使得$\tilde{u}_{ij}\to w_{ij}(N\to\infty)$，$\{u_{ij}\}$与$\{u_{ij}\}$对每个$N$同分布，$\{w_{ij}\}$为$iid\ N(0,1)$随机变量组，由$\{y_{ij}\}$与$\{u_{ij}\}$独立，故仍可使$\{\tilde{u}_{ij}\}$与$\{y_{ij}\}$独立。由于我们仅考虑(9)的解的极限分布。故我们无妨假定

$$U\to W=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\,w_{11}\cdots w_{1p}\\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\ w_{p1}\qquad\cdots\sqrt{2}\,w_{pp}\end{pmatrix}\qquad\forall\omega\in\Omega. \tag{11}$$

(当然，对不同的n，所有的U不再满足(8)(10)决定的关系了。)

引理2　设$K\geqslant k$，$f_n(z)=a_K^{(n)}z^K+\cdots+a_0^{(n)}\to f(z)=a_kz^k+\cdots+a_0$，其中$a_K^{(n)}\neq0$，$a_k\neq0$，$n=1,2,\cdots$。设$f$的根为$z_1,\cdots,z_k$，则$f_n$的根可适当排列为$z_1^{(n)},\cdots,z_k^{(n)},z_{k+1}^{(n)},\cdots,z_K^{(n)}$，使得当$n\to\infty$时，$z_i^{(n)}\to z_i(i\leqslant k)$　$|z_j^{(n)}|\to\infty$　$(j>k)$。

证　若$K>k$，则$a_K^{(n)}\to0$，而$a_k^{(n)}\to a_k\neq0$。故$\left|\dfrac{a_k^{(n)}}{a_K^{(n)}}\right|\to\infty$，由韦达定理知必有一个根$|z_K^{(n)}|\to\infty$。又由因式分解定理知存在$K$-1阶多项式$P_{K-1}^{(n)}(z)$致$f_n(z)=\left(\dfrac{z}{z_K^{(n)}}-1\right)(-P_{K-1}^{(n)}(z))$，令$n\to\infty$，由条件$f_n\to f$知$P_{K-1}^{(n)}(z)\to f(z)$。由归纳法知，可以找到$f_n$的$K$-$k$个根$|z_j^{(n)}|\to\infty$　$j=k+1,\cdots,K$，以及k次多项式$P_k^{(n)}(z)\to f(z)$，且$P_k^{(n)}(z)$的根也是$f_n(z)$的根。

我们断言，必可找到$P_k^{(n)}(z)$的一个根$z_1^{(n)}$，使得$z_1^{(n)}\to z_1$。若不然，则存在$\varepsilon>0$，自然数序列n_j，使得$|z_l^{(n)}-z_1|>\varepsilon$，$l=1,2,\cdots,k$，$n=n_j$，其中$z_1^{(n)},\cdots,z_k^{(n)}$都是$P_k^{(n)}(z)$的根。由分解定理知，$P_k^{(n)}(z)=b_k^{(n)}\prod_{l=1}^{k}(z-z_l^{(n)})$；其中$b_k^{(n)}$是$P_k^{(n)}(z)$的首项系数，故趋于$a_k$，代入$z_1$令$n$沿$n_j$趋于无穷知$P_k^{(n)}(z_1)\to f(z_1)=0$，另一方面有$|P_k^{(n)}(z_1)|=|b_k^{(n)}|\prod_{l=1}^{k}|z_1-z_l^{(n)}|\geqslant|b_k^{(n)}|\varepsilon^k\to|a_k|\varepsilon^k$，当$n$沿$n_j$趋于无穷时。又由因子分解定理知，存在$k$-1阶多项式$P_{k-1}^{(n)}(z)$

使$(z-z_1^{(n)})P_{k-1}^{(n)}(z)=P_k^{(n)}(z)$，$P_{k-1}(z)$使$(z-z_1)P_{k-1}(z)=f(z)$，由 $P_k^{(n)}\to f$及 $z_1^{(n)}\to z_1$ 知，$P_{k-1}^{(n)}\to P_{k-1}$。由归纳法易知引理成立。

将W按C同样阶数分块，分块阵记作W_{tg}，由(11)中 $U\to W$，$\forall\omega\in\Omega$ 的假定知，(9)的解除去$P-l_1$个零根外，其余的l_1个实根 ϕ_i 满足

$$\phi_i=\lambda_h+o(1),\quad i=a_{h-1}+1,\cdots,a_h,\quad h=1,2,\cdots,\nu+1 \tag{12}$$

其中$\lambda_{\nu+1}=0$，$a_{\nu+1}=l_1$，记$\Delta=\min\limits_{1\leq h<\nu}(\lambda_h-\lambda_{h+1})>0$。以下固定$\omega\in\Omega$。以 $\phi=\lambda_1+v\eta$代入(9)左边，并在前μ_1行，前μ_1列各除以$\sqrt{v}$，令$N\to\infty$，(9)左边经变化后趋于

$$\det\begin{pmatrix} C_{11}-\lambda_1W_{11}-\eta I\mu_1 & & & \\ & (\lambda_2-\lambda_1)I\mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\lambda_\nu-\lambda_1)I_{\mu_\nu} & \\ & & & & -\lambda_1 I_{p-r}\end{pmatrix}$$

此为η的μ_1次多项式，其根同于下面方程。

$$|C_{11}-\lambda W_{11}-\eta I_{\mu_1}|=0 \tag{13}$$

这个极限说明，作为η的多项式，(9)左边$\to$(13)左边，又由(12)知，当$N\geqslant N(\omega)$时

$$|\phi_i-\lambda_h|<\frac{1}{3}\Delta,\quad i=a_{h-1}+1,\cdots,a_h,\quad h=1,2,\cdots,\nu+1.$$

记$\tilde\eta_i=(\phi_i-\lambda_1)/v$。则

$$|\tilde\eta_i|<\Delta/(3v),\quad i=1,2,\cdots,\mu_1=a_1.$$

$$\tilde\eta_i<-2\Delta/3v,\quad i=a_1+1,\cdots,l_1.$$

以η_i记(13)的根，并按大小顺序排列，由引理 2 知，

$$\tilde\eta_i\to\eta_i\quad i=1,2,\cdots,\mu_1=a_1\qquad a.s. \tag{14}$$

(注$a.s.$是由于(13)有重根的概率为零)。同理可证

$$\tilde\eta_i=(\phi_i-\lambda_h)/v\to\eta_i(a.s.)\,i=a_{h-1}+1,\cdots,a_h,\quad h=1,2,\cdots,\nu. \tag{15}$$

其中$\eta_i(i=a_{h-1}+1,\cdots,a_h)$是行列式方程

$$|C_{hh}-\lambda_hW_{hh}-\eta I_{\mu_h}|=0 \tag{16}$$

之根，且按大小次序排列。

最后，令$\phi=v^2\zeta$代入(9)式，并在最后p-r行p-r列分别除以v后令$N\to\infty$得

$$\det\begin{pmatrix}\lambda_1I_{\mu_1} & 0 & \cdots E_1' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_\nu I_{\mu_\nu} & E_\nu' \\ E_1\cdots E_\nu & & \bar A-\zeta I\end{pmatrix}=0, \tag{17}$$

其中$\bar A$是A右下角$(p-r)\times(p-r)$子阵。

或等价地

$$\det\left(\bar{A}-\frac{1}{\lambda_1}E_1E_1'-\cdots-\frac{1}{\lambda_\nu}E_\nu E_\nu'-\zeta I\right)=0. \tag{18}$$

回忆A的构造及E_h的构造，整理(18)式得

$$\det((e_{ij})-\zeta I)=0, \tag{19}$$

其中
$$e_{ij}=\sum_{\beta=1}^{n_1-r}y_{i\beta}y_{j\beta}\quad (i,j=r+1,\cdots,P). \tag{20}$$

记(19)之解为ζ_{k+1}，$\cdots\zeta_{l_1}$，$0\cdots0$(由于(e_{ij})的秩为l_1-r，故(19)有p-l_1重零解)。又由引理2知，

$$\bar{\zeta}_i=\phi_i/v^2\to\zeta_i,\ \ i=r+1,\cdots,l_1.\ a.s.$$

至此我们补证了[2]中的引理3，[2]中主要定理的证明照旧。

参考文献

[1] Hsu. P. L., On the Distribution of Roots of Certain Determinantal Equations, *Ann Eugen* 9 (1939) 250—258.

[2] Hsu. P. L. "On the Limiting Distribution of Roots of a Determinantal Equation, *J. London Math. Soc.* 16 183—194 (1941);

[3] 陈希孺：线性模型中误差方差估计的Berry-Essee界限，中国科学(1981)129—140.

[4] Bai, Z. D. & Liang, W. Q., Strong Representation of Weak Convergence, Center for Multivariate Analysis, University of Pittsburgh, Technical Report №: 84.

A Note on the Limiting Distribution of Eigenvalues of a Kind of Random Matrices

Z. D. Bai

Abstract

In P. L. Hsu[2] (1941), the proof of the basic Lemma 3 is based on Lemma 1 which is wrong. The aim of this note is to correct the proof of Lemma 3. Consequently, the main theorem in P. L. Hsu[2] (1941) is true.