第5卷 第2期
1985年4月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.2
April 1985

限量分配问题的一个注记*

初文昌

（大连工学院应用数学研究所）

§1 引 言

限量分配问题是古典概率论、组合论的重要内容。本文将文献[1]、[2]中的一类广泛的限量分配问题给以统一的处理并加以推广，归结为如下问题：

问题 I 内无序分配问题．给定 m 类盒和 n 类球，假定第 i 类球和第 j 类盒的个数分别为 r_i、s_j（$1\leqslant i\leqslant n$，$1\leqslant j\leqslant m$），即所谓球的规格为 $\vec{R}=(r_1,r_2,\cdots,r_n)$ 和盒的规格为 $\vec{S}=(s_1,s_2,\cdots,s_m)$．已知第 i 类盒对于球的限量集为 A_i（这里 $A_i\in N_0^n$，其中每个元素表示该类盒所能容纳之球的规格，$1\leqslant i\leqslant m$），记 $A=(A_1,A_2,\cdots,A_m)$．则分配规格为 $\vec{R}$ 的球至规格为 $\vec{S}$ 的盒中，限量条件为 A 且盒内无序，此时分配方法数 $d_1^{(A)}(\vec{R},\vec{S})$ 是多少？

问题 II 内有序分配问题．在问题 I 中，设盒的规格为 $\vec{T}=(t_1,t,\cdots,t_l)$，以 B 表示相应的限量集，只是要求分配于盒内有序．此时分配数 $d_2^{(B)}(\vec{R},\vec{T})$ 是多少？

问题 III 混合型分配问题．如问题 I、II 所述，在限量条件 A、B 之下，将规格为 $\vec{R}$ 的球同时分配于规格为 $\vec{S}$ 的无序盒和规格为 $\vec{T}$ 的有序盒中．问分配方法数 $d^{(A,B)}(\vec{R},\vec{S},\vec{T})$ 是多少？

对于上述问题，本文将给出相应分配序列的发生函数，并且通过引入点对称函数讨论有关的计算，最后给出 n 个特例以示说明．

§2 发生函数

利用多项式展开容易验证：

定理 1 在问题 I、II、III中，若球、无序盒、有序盒的种类数分别为 n、m、l，则分配序列 $\{d_1^{(A)}(\vec{R},\vec{S})\}_{(\vec{R},\vec{S})}$，$\{d_2^{(B)}(\vec{R},\vec{T})\}_{(\vec{R},\vec{T})}$ 和 $\{d^{(A,B)}(\vec{R},\vec{S},\vec{T})\}_{(\vec{R},\vec{S},\vec{T})}$ 的普母函数分别为

$$D_1^{(A)}(\vec{X},\vec{U})=\prod_{i=1}^{m}\prod_{(k_{i1},k_{i2},\cdots,k_{in})\in A_i}(1-u_ix_1^{k_{i1}}\cdots x_n^{k_{in}})^{-1} \tag{1}$$

$$D_2^{(B)}(\vec{X},\vec{V})=\prod_{j=1}^{l}\prod_{(k_{j1},k_{j2},\cdots,k_{jn})\in B_j}(1-v_jx_1^{k_{j1}}x_2^{k_{j2}}\cdots x_n^{k_{jn}})^{-\binom{\sum_{i=1}^{n}k_{ij}}{k_{j1},k_{j2},\cdots,k_{jn}}} \tag{2}$$

$$D^{(A,B)}(\vec{X},\vec{U},\vec{V})=D_1^{(A)}(\vec{X},\vec{U})\cdot D_2^{(B)}(\vec{X},\vec{V}) \tag{3}$$

---

*1982年10月20日收到．

这里
$$\binom{\sum_{i=1}^{n} k_{ji}}{k_{j1}, k_{j2}, \cdots, k_{jn}} = \frac{(k_{j1}+k_{j2}+\cdots+k_{jn})!}{k_{j1}!\,k_{j2}!\cdots k_{jn}!}.$$

易知 $D_1^{(A)}(\vec{X}, \vec{U}) = D^{(A,B)}(\vec{X}, \vec{U}, \vec{O})$，$D_2^{(B)}(\vec{X}, \vec{V}) = D^{(A,B)}(\vec{X}, \vec{O}, \vec{V})$。所以下面关于混合型分配问题的讨论同样适用于问题Ⅰ、Ⅱ。

定理1包含着十分丰富的内容，特作如下几点说明：

1^0 对于每一个给定的限量条件，发生函数之展开式的每一项所对应的系数均有各种不同的组合学解释。对于发生函数（1）、（2）、（3）进行适当的处理几乎可以推出[1]、[2]中的所有关于分配问题的结果（某些关于分析问题之母函数的结论亦能由此推出）。

2^0 在（3）中若令 $\vec{U} = \vec{1}$（分量全为1的矢量），得 $D^{(A,B)}(\vec{X}, \vec{1}, \vec{V})$。这是在限量条件 A、B 下，将确定规格的球同时分配于具有确定规格的有序盒和所有可能的规格的无序盒之分配序列的母函数。同理可以得到其它类似情况（甚至可以更细致地，如令矢量的某几个分量为1，而其它不变）的组合学解释。

3^0 类似于[1]中关于分析问题母函数的讨论，在问题Ⅲ中若附加同类无序盒中分部互异、同类有序盒中排列之异的限制，则此时的发生函数为：

$$\prod_{i=1}^{m} \prod_{(k_{i1}, k_{i2}, \cdots, k_{in}) \in A_i} (1 + u_i x_1^{k_{i1}} x_2^{k_{i2}} \cdots x_n^{k_{in}}) \cdot \prod_{j=1}^{l} \prod_{(k_{j1}, k_{j2}, \cdots, k_{jn}) \in B_j} (1 + v_j x_1^{k_{j1}} x_2^{k_{j2}} \cdots x_n^{k_{jn}})^{\binom{\sum_{\nu=1}^{n} k_{j\nu}}{k_{j1}, k_{j2}, \cdots, k_{jn}}} \tag{4}$$

同理可以得到关于盒子分部、分部量、排列的相异或相同时的各种附加限制条件的分配序列的母函数。

4^0 对于某些类球及盒的总数附加简单的相等或不等限制时，可通过简单地处理原来分配问题的发生函数而得到新的分配序列的发生函数。如对于发生函数 $D^{(A,B)}(\vec{X}, \vec{U}, \vec{V})$ 的混合型分配问题，如果附加下述限制：要求标号属于 $I_r(I_r \subset J_n = [1, n]$上的自然数）的球之总数恰为某自然数 k_r；标号属于 $I_s(I_s \subset J_m)$ 的无序盒之总数不超过某自然数 k_s；标号属于 $I_t(I_t \subset J_l)$ 的有序盒之总数不小于某自然数 k_t。而其余的球及盒仍具有确定的规格，则此时的分配序列

$$\{d^{(A,B)}(\vec{R}_{J_n \setminus I_r}(k_r), \vec{S}_{J_m \setminus I_s}(k_s), \vec{T}_{J_l \setminus I_t}(k_t))\}_{(\vec{R}_{J_n \setminus I_r}(k_r), \vec{S}_{J_m \setminus I_s}(k_s), \vec{T}_{J_l \setminus I_t}(k_t))}$$

的发生函数为：

$$\frac{1}{1-u} \frac{1}{1-v} D^{(A,B)}(\overrightarrow{X_{J_n \setminus I_r} \vee x_{I_r}^0}, \overrightarrow{u_{J_m \setminus I_s} \vee u_{I_s}^0}, \overrightarrow{v_{J_l \setminus I_t} \vee I_{I_t}^0}) -$$

$$- \frac{1}{1-u} \frac{v}{1-v} D^{(A,B)}(\overrightarrow{X_{J_n \setminus I_r} \vee x_{I_r}^0}, \overrightarrow{u_{J_m \setminus I_s} \vee u_{I_s}^0}, \overrightarrow{V_{J_l \setminus I_t} \vee v_{I_t}^0}) \tag{5}$$

这里 $\overrightarrow{X_{J_n \setminus I_r} \vee x_{I_r}^0}$ 表示矢量 $\vec{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的属于 I_r 的分量换为 x，其它类同。同理可以得到类似的附加条件的母函数，这里就不罗列了。

§3 点对称函数与分配序列的计算

为给出分配序列的一种算法，引进如下定义及记号。

定义　在表达式 $F=\prod_i(1-\alpha_i x)^{\beta_i}$ 中，F 的展开式的 $(-x)^n$ 之系数 ω_n 称为点列 $\{\alpha_i,\beta_i\}_i$ 的 n 次初等点对称函数；而 F^{-1} 的展开式之 x^n 的系数 H_n 称为点列 $\{\alpha_i,\beta_i\}_i$ 的 n 次齐次积和点对称函数；$r_n=\sum_i\beta_i\alpha_i^n$ 称为点列 $\{\alpha_i,\beta_i\}_i$ 的 n 次等次幂和点对称函数.

容易知到，如上定义的函数确是关于点列 $\{\alpha_i,\beta_i\}_i$ 对称的，且 $\beta_i\equiv1$ 时变为通常的关于序列的对称函数 σ_n、h_n 及 s_n（见[1]中 §2.6）. 完全类似于 [1]中 §2.6 的方法，可证明点对称函数之间的下列关系：

定理 2　$(-1)^n n!\omega_n=Y_n(-r_1,\ -r_2,\ -2!r_3,\cdots,-(n-1)!r_n)$　(6)

$$n!H_n=Y_n(r_1,\ r_2,\ 2!r_3,\cdots,(n-1)!r_n),\tag{7}$$

$$-(n-1)!r_n=Y_n(-p\omega_1,\ 2!p\omega_2,\cdots,(-1)^n n!p\omega_n),\tag{8}$$

$$(n-1)!r_n=Y_n(pH_1,\ 2!pH_2,\cdots,n!pH_n)\tag{9}$$

$$(p^i=(-1)^{i-1}(i-1)!).$$

此处 Y_n 为 Bell 多项式.

在（3）中设 $\sigma_p^{(i)}$、$s_p^{(i)}$、$h_p^{(i)}$ 分别为序列 $\{x_1^{k_{i1}}x_2^{k_{i2}}\cdots x_n^{k_{in}}\mid(k_{i1},\ k_{i2},\cdots,k_{in})\in A_i\}$ 的 p 次对称函数；而 $\omega_q^{(j)}$、$r_q^{(j)}$、$H_q^{(j)}$ 分别为点列 $\{(x_1^{k_{j1}}x_2^{k_{j2}}\cdots x_n^{k_{jn}},\binom{\sum_{i=1}^n k_{ji}}{k_{j1},k_{j2},\cdots k_{jn}})\mid(k_{j1},\ k_{j2},\cdots,k_{jn})\in B_j\}$ 的 q 次点对称函数. 则分配序列 $\{d^{(AB)}(\vec{R},\ \vec{S},\ \vec{T})\}_{\vec{R}}$ 的发生函数为

$$\prod_{i=1}^m h_{s_i}^{(i)}\cdot\prod_{j=1}^l H_{t_j}^{(j)}\tag{10}$$

且分配序列 $\{d_1^{(A)}(\vec{R},\ \vec{S})\}_{\vec{R}}$ 和 $\{d_2^{(B)}(\vec{R},\vec{T})\}_{\vec{R}}$ 的发生函数分别为

$$\prod_{i=1}^m h_{s_i}^{(i)}\ \text{和}\ \prod_{j=1}^l H_{t_j}^{(j)}\tag{11}$$

在某些特殊条件下，h 与 H 有简洁的表示式，从而使得许多重要的特殊类型的分配问题得到完全解答. 这在 §4 中即可看到.

现在借助子母函数（3）推演有关分配序列的递归关系.

定理 3　设 $A_i=A_i'\cup A_i''$ 且 $A_i'\cap A_i''=\varnothing\ (1\leqslant i\leqslant m)$，$B_j=B_j'\cup B_j''$ 且 $B_j'\cap B_j''=\varnothing\ (1\leqslant j\leqslant l)$. 则由 $D^{(AB)}(\cdots)=D^{(A'B')}(\cdots)D^{(A''B'')}(\cdots)$ 可以推得如下一对反演关系：

$$d^{(A,B)}(\vec{R},\vec{S},\vec{T})=\sum_{\substack{\vec{0}<\vec{X}<\vec{R}\\ \vec{0}<\vec{Y}<\vec{S}\\ \vec{0}<\vec{Z}<\vec{T}}} d^{(A'',B'')}(\vec{R}-\vec{X},\vec{S}-\vec{Y},\vec{T}-\vec{Z})\cdot d^{(A',B')}(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})\tag{12}$$

$$d^{(A',B')}(\vec{R},\vec{S},\vec{T})=\sum_{\substack{\vec{0}<\vec{X}<\vec{R}\\ \vec{0}<\vec{Y}<\vec{S}\\ \vec{0}<\vec{Z}<\vec{T}}}(-1)^{\sum_{i=1}^m y_i+\sum_{i=1}^l z_i}d_*^{(A'',B'')}(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})\cdot d^{(A,B)}(\vec{R}-\vec{X},\vec{S}-\vec{Y},\vec{T}-\vec{Z}).\tag{13}$$

这里$d_{*}^{(A''B'')}(\cdots)$表示附加同类无序盒分部互异、同类有序盒排列互异的限制条件之混合型分配序列。而和号下面的序关系$\vec{X}\leqslant\vec{Y}$表示$x_i\leqslant y_i$，即偏序集$(N_o,\leqslant)$的直积。

特别有：

$$d^{(AB)}(\vec{R},\ \vec{S},\ \vec{T})=\sum_{\vec{O}<\vec{X}<\vec{R}} d_1^{(A)}(\vec{R}-\vec{X},\ \vec{S})\cdot d_2^{(B)}(\vec{X},\ \vec{T}). \tag{14}$$

容易想见，对于发生函数$D^{(AB)}(\vec{X},\ \vec{U},\ \vec{V})$采用不同的方法（如使用微分算子）进行处理时，将能得到某些关于分配序列的递归关系。这里不加赘述。

§4 某些特例

前面已经指出，问题Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ是〔1〕、〔2〕中各种类型分配的概括和推广。借助于发生函数及§3中的结果，可以推得〔1〕、〔2〕中的几乎所有的特殊类型的分配序列；此外，对于A和B进行某些规则的限制（如对A_i中矢量的各分量加以独立的等差限制，而B_j中矢量的分量和加以等差限制），还可推得新的特殊类型的分配问题的计数表达式，同时对这些分配问题的母函数进行妥善的处理、以不同的形式展开时，将会得到某些有趣的组合恒等式。

例1 设球规格为$\vec{R}=(r_1,\ r_2,\cdots,r_n)$，盒是可辨的且种类数为$m$，记其规格为$J_m$。现在考虑内无序分配问题，若限量集$A_j$中各矢量之分量形式为$\{(p_{ij}+k_{q_i})(1\leqslant i\leqslant n)|k\in N^{\circ}\}$ $(1\leqslant j\leqslant m)$，则容易求得$h_1^{(j)}=\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i^{p_{ij}}}{(1-x^{q_i})}$，从而可以推得分配序列的计数表达式为：

$$d_1^{(A)}(\vec{R},\vec{J}_m)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\dbinom{m+\dfrac{r_i-\sum_{j=1}^{m}p_{ij}}{q_i}-1}{m-1} & \text{若 } r_i-\sum_{j=1}^{m}p_{ij}\equiv 0(\bmod q_i)_{(1\leqslant i\leqslant n)}\\ 0 & \text{否则。}\end{cases} \tag{15}$$

例2 仍设球的规格为$\vec{R}=(r_1,\ r_2,\cdots,r_n)$，盒的规格为$J_l$。考虑内有序分配问题，若限量集$B_j$各矢量的分量和（容量）形式为$\{(p_j+kq)|k\in N^{\circ}\}$，则容易求得

$$H_1^{(j)}=\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^{p_j}}{1-(x_1+x_2+\cdots+x_n)^q}\quad(1\leqslant j\leqslant l).$$

此时分配序列的计数表达式为：

$$d_2^{(B)}(\vec{R},\vec{J}_l)=\begin{cases}\dbinom{l+\dfrac{1}{q}\left(\sum_{i=1}^{n}r_i-\sum_{j=1}^{l}p_j\right)-1}{l-1}\cdot\dbinom{\sum_{i=1}^{n}r_i}{r_1,r_2,\cdots,r_n} & \text{若 }\sum_{i=1}^{n}r_i-\sum_{j=1}^{l}p_j\equiv 0(\bmod q)\\ 0 & \text{否则。}\end{cases} \tag{16}$$

利用简单的组合推理容易得到例1中的内有序分配和例2中的内无序分配序列分别为：

$$d_2^{(A)}(\vec{R}、\vec{J}_m)=\dbinom{\sum_{i=1}^{n}r_i}{r_1,r_2,\cdots,r_n}d_1^{(A)}(\vec{R},\ \vec{J}_m) \tag{17}$$

$$d_1^{(B)}(\vec{R}、\vec{J}_m)=\frac{1}{\binom{\sum_{i=1}^{n}r_i}{r_1,r_2,\cdots,r_n}}d_2^{(B)}(\vec{R},\vec{J}_l)。\tag{18}$$

容易知道上述二式对一般限量集A、B亦成立。

例3　给定n个不同的球及m个可辩的盒，即规格分别为J_n和J_m，若各盒的容量分别为

$$\{b+si\mid i\in N^0。0\leqslant b<s\},\ 则\ h_1^{(i)}=\frac{1}{s}\sum_{j=0}^{s-1}\omega^{-jb}\prod_{i=1}^{n}(1-x_i\omega^j)^{-1},(\omega=e^{\frac{2\pi i}{s}})。$$

从而可得相应的内无序分配序列$d_n^{(b,s)}(m)$的计数表达式为

$$d_1^{(b,s)}(m)=\frac{1}{s^m}\sum_{i_0+i_1+\cdots+i_{s-1}=m}\binom{m}{i_0,i_1,\cdots,i_{s-1}}\omega^{-\sum_{j=0}^{s-1}ji_j^b}\left(\sum_{j=0}^{s-1}i_j\omega^j\right)^n。\tag{19}$$

借助于递归方法或例2中通过有序分配计数方法还可得到$d^{(b,s)}(m)$的其它形式的表达式。

在例3中若取$s=2$，便得[3]中分配问题的另一组计数表示，将此与[3]中的表示式联立可得到一组恒等式。特别地，如果利用差分算子(步长为1)，可使得[3]中的分配数有简洁的表示式：

$$d_n^{(0,2)}(m)=\left(1+\frac{\Delta}{2}\right)^m(2x-m)^n|x=0\tag{20}$$

$$d_n^{(1,2)}(m)=\left(\frac{\Delta}{2}\right)^m(2x-m)^n|x=0\tag{21}$$

$$d_n^{(2,2)}(m)=\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}\left(1+\frac{\Delta}{2}\right)^i(2x-i)^n\ |x=0\tag{22}$$

显然这比Bell多项式的表示更易于推演和计算。

此外容易知道，利用§3中的方法还可得到某些混合型分配问题的计数表示式。但是应当指出，寻求一般的分配问题的计数表示并非易事。

参　考　文　献

[1] 柯召、魏万迪著，《组合论》(上册)，科学出版社，1981.

[2] Riordan. J,. An introduction ro Combinatorial analysis, New York. Wiley, 1958。

[3] 魏万迪，一类限量分配问题，科学通报，22(1980)，1011.

A Note on the Distribution Problems with Restricted Sizes

Chu Wenchang

(DIT)

Abstract

In this paper, we have generalired a class of restricted distribution problems in the literatures [1]、[2] and obtained the generating functions with respect to the related sequences. By introducing the concept of pointwise symmetric functions, the calculation of the distribution sequences has been discussed. Finally, some examples are given.