第5卷 第2期 1985年4月
数学研究与评论 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.5 No.2 April 1985

关于一类插值样条的讨论*

杨义群

（浙江农业大学）

对于区间$[-1,1]$的分划

$$-1=x_0<x_1<\cdots<x_n=1, \tag{1}$$

令 $h_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$ 及 $h=\max h_i$。记 $V^3=\left\{f: \int_{-1}^{1}|df^{(3)}(x)|<+\infty\right\}$。设$f\in V^3$，$s\in C^1[-1,1]$，$s$ 在每个 $(x_{i-1},x_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 上都是二次多项式，且 $s'(0)=f'(0)$ 及 $s(x_i)=f(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$。又记 $R=f-s$。最近[1]（178页定理 2.2）证有

定理 A 若 $\sum_{i=2}^{k-1}|h_i-h_{i-1}|\leqslant Ah_k(k=3,4,\cdots,n)$， (2)

则*)
$$\|R^{(k)}\|\leqslant A_k h^{3-k}V_3(f) \quad (k=0,1,2), \tag{3}$$

其中记$V_3(f)=\|f^{(3)}\|+\int_{-1}^{1}|df^{(3)}(x)|$，

$$A_0=1/24, \quad A_1=1/6, \quad A_2=(2+2A+B)/3 \tag{4}$$

及
$$B=\max_k[\max\{h_1,h_2,\cdots,h_k\}/h_k]. \tag{5}$$

[2]曾证有

定理 B 若 $\sum_{i=2}^{n}|h_i-h_{i-1}|=O(h)$ (6)

及
$$\max_{1<m<n}\left(\max_{m<i}\frac{1}{h_m}\sum_{j=m+1}^{i}|h_j-h_{j-1}|, \ \max_{i<m}\frac{1}{h_m}\sum_{j=i+1}^{m}|h_j-h_{j-1}|\right)=O(1), \tag{7}$$

则有
$$\|R^{(k)}\|=O(h^{3-k}) \quad (k=0,1,2). \tag{8}$$

定理A早在[3]中报导过。我们曾在[4]的末尾谈及定理A中存在着疏忽之处。因为当时未见到证明，所以没有详细讨论。现在看到[1]的证明中没有给出比较详细的推导步骤，所以我们在这里具体地给出下述比较简单的一个实例来说明上述定理A不能成立。

例 设 $f(x)=x^3, n=3, x_1=0$ 及 $x_2=0.1$，则

$$s(x)=\begin{cases}-2x^2-x & (-1\leqslant x\leqslant 0),\\ 10.1x^2-x & (0\leqslant x\leqslant 0.1),\\ 0.1x^2+x-0.1 & (0.1\leqslant x\leqslant 1).\end{cases}$$

当 $0.1\leqslant x\leqslant 1$ 时有 $R(x)=x^3-0.1x^2-x+0.1$ 及 $R'(x)=3x^2-0.2x-1$。于是有 $\|R'\|\geqslant R'(1)=1.8>A_1h^2V_3(f)=1$，其中 $h=1$ 及 $V_3(f)=\|f^{(3)}\|=6$。这说明(3)式在 $k=1$ 时不成立。

*1984年10月24日收到。

*)在本文中，没有特别声明时，用$\|\cdot\|$表示$L^\infty(-1,1)$空间中的范数。

为了讨论与比较定理A与B中的各个假设条件，我们可利用下述已知的(见[4])

定理1 对于一切$f\in V^3$成立着(8)式的充要条件是

$$H=O(h^2), \tag{9}$$

其中记

$$H=\max\{|\sum_{i=1}^{k}(-1)^i h|:\ k=1,2,\cdots,n\}.$$

定理A告诉我们：当

$$\sum_{i=2}^{k-1}|h_i-h_{i-1}|=O(h_k)\qquad(k=3,4,\cdots,n) \tag{10}$$

且

$$h_i=O(h_k)\quad(i<k=2,3,\cdots,n) \tag{11}$$

时(8)式成立。

由下述引理1可见，为了使(8)式成立，条件(7)与(11)都可取消，而且剩下的条件(6)还是过强的，条件(10)更是过强的。

引理1 条件(10)含有条件(6)，条件(6)又含有条件(9)，而条件(9)不含有条 件(6)，从而更不含有条件(10)。

证 设条件(6)成立，也即存在$A>0$使(2)式成立。这时有

$$|\sum_{i=1}^{2k}(-1)^i h_i^2|-|\sum_{i=1}^{k}(h_{2i-1}^2-h_{2i}^2|\leqslant 2h\sum_{i=1}^{k}|h_{2i-1}-h_{2i}|\leqslant 2Ah^2,\left(k=1,2,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

及

$$|\sum_{i=1}^{2k+1}(-1)^i h_i^2\leqslant|\sum_{r=1}^{2k}(-1)^i h_i^2|+h^2\leqslant(2A+1)\,h^2\left(k=1,2,\cdots,\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)$$

也即条件(9)成立。所以条件(6)含有条件(9)。条件(10)含有条件(6)是显然的。

另一方面，若在(1)中取$n=4m-2$，$(m=2,3,\cdots)$

及

$$h_i=\begin{cases}m^{-2} & (i=1,2,5,6,9,10,\cdots,n-1,n)\\ m^{-1} & (i=3,4,7,8,11,12,\cdots,n-3,n-2),\end{cases}$$

则有$h=1/m$，$\sum_{i=l}^{2k}(-1)^i h_i^2=0$，$\left(k=1,2,\cdots,\dfrac{n}{2}\right)$，$\sum_{i=1}^{4k-1}(-1)^i h_i^2=-h$，$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$及$\sum_{i=1}^{4k-3}(-1)^i h_i^2=-h^2$，$(k=1,2,\cdots,m)$。因此这时条件(9)满足，而条件(6)显然不满足，条件(10)更不满足。引理1证毕。

为了得到定理A那样形式的结果，我们可以将[4]中的引理3进一步叙述为如下的

引理2 若在$[0,\ a]$上$P^{(2)}\in\mathrm{Lip}$且$P(a)=0$，

则有

$$\|P^{(k)}\|\leqslant[B_k|P(0)|+C_k|P'(0)|a+D_k\|P^{(3)}\|a^3]a^{-k}\qquad(k=0,1,2),$$

其中$\|\cdot\|$是$L^\infty(0,a)$空间中的范数，$C_0=1/4$，$B_0=C_1=1$，$B_1=B_2=C_2=2$，$D_0=2/81$，$D_1=1/6$及$D_2=1/3$。

引理2的证明类似于[4]的引理3。由此，我们可以得到

定理2 若$f\in V^3$，则有

$$\|R^{(k)}\|\leqslant D_k\|f^{(3)}\|h^{3-k}+E_kV_3(f)Hh^{1-k}\ \ (k=0,1,2),$$

其中$E_0=1/24$，$E_1=1/6$，$E_2=1/3$，而D_k在引理2中给出。

定理2的证明类似于[4]的定理2。

参 考 文 献

[1] 李岳生，样条与插值、上海科技出版社，1983.

[2] 谢深泉，高校计算数学学报，2(1980)，1：94—96.

[3] 李岳生，中山大学学报，1981，2:118—119.

[4] 杨义群，数学研究与评论，1982，4:57—64.