第5卷 第2期 数学研究与评论 Vol.5 No.2
1985年4月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION April 1985

El Karoui的半鞅上穿定理的简单证明*

严加安

（中国科学院应用数学所）

摘　要

El Karoui 在［1］及［2］中给出了半鞅局部时的上穿刻划，这部分地推广了有关 Brown 运动的 Lévy 下穿定理。本文用随机积分的控制收敛定理直接推出了这一结果，从而大大简化了原证明。

令 (X_t) 为一半鞅，a 为一实数。(X_t) 在 a 处的局部时 (L_t^a)（它是一连续增过程）由下式定义（［3］，p.353）：

$$(X_t-a)^+=(x_0-a)^++\int_0^t I_{[X_{s-}>a]}d(X_s-a)$$
$$+\sum_{0<s\le t}\left\{I_{[X_{s-}\le a]}(X_s-a)^++I_{[X_{s-}>a]}(X_s-a)^-\right\}+\frac{1}{2}L_t^a. \tag{1}$$

熟知，对几乎所有 ω，测度 $dL^a(\omega)$ 以集合 $\{t:\ X_{t-}(\omega)=a\}$ 为支撑，故由(1)得

$$\int_0^t I_{[X_{s-}\le a]}d(X_s-a)^+=\sum_{0<s\le t}I_{[X_{s-}\le a]}(X_s-a)^++\frac{1}{2}L_t^a. \tag{2}$$

设 $I=(a,b)$ 为直线上的一有界区间。令

$$S_1=\inf\{t\geqslant 0:\ X_t\leqslant a\},\quad T_1=\inf\{t>S_1:\ X_t\geqslant b\},$$
$$S_k=\inf\{t>T_{k-1}:\ X_t\leqslant a\},\quad T_k=\inf\{t>S_k:\ X_t\geqslant b\},\quad k\geqslant 2. \tag{3}$$

则过程 X 在时间区间 $[0,t]$ 内上穿区间 I 的次数为 $U_t^I=\sum_k I_{[T_k\le t]}$。

下一定理是 El Karoui 关于连续半鞅局部时的上穿刻划（见［1］）。

定理1　设 X 为一连续半鞅。令 a 为一实数，(b_n) 为一实数列，使得 $b_n>a$ 且 $b_n\to a$。记 $I_n=(a,b_n)$，则对一切 $t>0$，

$$\sup_{s\le t}\left|(b_n-a)\,U_s^{I_n}-\frac{1}{2}L_s^a\right|\xrightarrow{P}0,\quad (n\to\infty). \tag{4}$$

证　这一定理是下一定理的特例。但由于它的证明很简单，所以我们还是直接证明它。

*1984年5月16日收到。

由于(X_t)连续，(3)中定义的停时(S_k)及(T_k)为可料时。我们用(S_k^n)及(T_k^n)表示对X及I_n按(3)式定义的可料时。令$A_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}[\![S_k^n, T_k^n]\!]$。则当$b_n<b_m$时，有$A_n\subset A_m$。此外，我们有$\bigcap_n A_n=[(t,\omega): X_t(\omega)\leqslant a]\triangleq[X\leqslant a]$。于是，$\lim_{n\to\infty} I_{A_n}=I_{[X\leq a]}$。另一方面，显然有

$$\int_0^t I_{A_n}(s)d(X_s-a)^+=(b_n-a)U_t^{I_n}+\xi_t^n,$$

其中
$$\xi_t^n=(X_t-a)^+I_{\bigcup_k[S_k^n<t<T_k^n]},$$

由(2)及随机积分的控制收敛定理([3]，定理9.39)，我们有

$$\sup_{s\leq t}\left|(b_n-a)U_s^{I_n}+\xi_s^n-\frac{1}{2}L_s^a\right|\xrightarrow{P}0,\quad(n\to\infty).$$

这蕴含(4)，因为$0\leqslant\xi_t^n\leqslant b_n-a\to0\ (n\to\infty)$。定理证毕。

下一定理是一般半鞅局部时的上穿刻划(见[2])。

定理2 设X为一半鞅。令a为一实数，(b_n)为一实数列，使得$b_n>a$，且$b_n\to a$。令(S_k^n)及(T_k^n)为对$I_n=(a, b_n)$按(3)定义的停时，并令

(5) $$w_t^n=\sum_k I_{[X_{T_k^n-}>a]}(X_{T_k^n}-b_n)I_{[T_k^n\leq t]},$$

则对一切$t\geqslant0$,

(6) $$\sup_{s\leq t}\left|(b_n-a)U_s^{I_n}+w_s^n-\frac{1}{2}L_s^a\right|\xrightarrow{P}0,\quad(n\to\infty).$$

证 令
$$A_n=\bigcup_k[\![S_k^n, T_k^n]\!], A=\bigcap_n A_n,$$

则A_n及A为可料集，且当$b_n<b_m$时有$A_n\subset A_m$。于是有$\lim_{n\to\infty}I_{A_n}=I_A$。显然我们有

(7) $$\int_0^t I_{A_n}(s)d(X_s-a)^+=\sum_k(X_{T_k^n}-a)I_{[T_k^n\leq t]}+\xi_t^n=(b_n-a)U_t^{I_n}+\sum_k(X_{T_k^n}-b_n)I_{[T_k^n\leq t]}+\xi_t^n,$$

其中

(8) $$\xi_t^n=(X_t-a)^+I_{\bigcup_k[S_k^n<t<T_k^n]}\leqslant b_n-a.$$

另一方面，由于 $A\subset[(t,\omega): X_{t-}(\omega)\leqslant a]$, $[X=a]\backslash A\subset\bigcup_{k,n}[\![S_k^n]\!]$，

且由于对几乎所有ω，测度$dL_{(\omega)}^a$以$[X=a]$为支撑，故由(2)得

(9) $$\int_0^t I_A(s)d(X_s-a)^+=\sum_{0<s\leq t}I_A(s)I_{[X_{s-}\leq a]}(X_s-a)^++\frac{1}{2}L_t^a.$$

现设$\delta>0$。若$b_n-a\leqslant\delta$，则显然有

$$[X_-\leqslant a, X\geqslant a+\delta]\cap A\subset\bigcup_k[\![(T_k^n)_{[X_{T_k^n-}\leqslant a]}]\!]\subset A_n\cap[X_-\leqslant a].$$

于是，对$b_n\leqslant a+\delta$，我们有

(10) $$\sum_{0<s\leq t}I_A(s)I_{[X_{s-}\leq a]}(X_s-a)^+I_{[X_s>a+\delta]}\leqslant\sum_k I_{[X_{T_k^n-}<a]}(X_{T_k^n}-a)I_{[T_k^n\leq t]}$$

$$\leqslant \sum_{0<s\leq t} I_{A_n}(s) I_{[X_{s-}\leq a]}(X_s - a)^+.$$

在(10)中相继令 $n\to\infty$ 及 $\delta\downarrow 0$ 得

$$\text{(11)} \qquad \lim_{n\to\infty}\sum_k I_{[X_{T_k^n -}<a]}(X_{T_k^n}-a) I_{[T_k^n\leq t]} = \sum_{0<s\leq t} I_A(s) I_{[X_{s-}\leq a]}(X_s - a)^+.$$

此外，令 $\mu_t = \sum_{0<s\leq t} I_{[X_{s-}\leq a]}(X_s-a)^+$，　$H_n(t) = \dfrac{X_t\wedge b_n - a}{X_t - a} I_{[X_t>a]}$，

则由于 $0\leqslant H_n\leqslant 1$，且 $\lim_{n\to\infty} H_n = 0$，我们有

$$\text{(12)} \quad (b_n - a)\sum_k I_{[X_{T_k^n -}<a} \; I_{[T_k^n\leq t]} \leqslant \sum_{0<s\leq t} I_{[X_{s-}\leq a]}(X_s\wedge b_n - a)^+ = \int_0^t H_n(s)\,d\mu_s \to 0, \quad (n\to\infty).$$

由(7)、(8)、(9)、(11) 及 (12) 并由随机积分的控制收敛定理，对一切 $t\in\mathbf{R}_+$，有

$$\text{(13)} \qquad C_t^n \triangleq (b_n - a) U_t^{l_n} + W_t^n \xrightarrow{P} \frac{1}{2} L_t^a.$$

但 (C_t^n) 为增过程，(L_t^a) 为连续增过程，于是由 McLeish [4] 中一引理知，(6) 式成立。定理证毕。

参　考　文　献

[1] El Karoui (N.), Sur les montées des semimartingales, Astérisque 52～53(1978), *Soc. Math. France*, pp.63—72.

[2] El Karoui (N.), Sur les montées des semimartingales, le cas non continu, 同上, pp.73—87.

[3] 严加安，鞅与随机积分引论，上海科学技术出版社，1981.

[4] McLeish (D. L.), An extended martingale principle, *Ann. Probab.*, 6(1978), PP, 56—66

A Simple Proof of El Karoui's Upcrossing Theorem on Semimartingales

Yan Jia-an

(Institute of Appl. Math. Academia Sinica)

Abstract

In the papers [1] and [2] El karoui has given an upcrossing characterigation of local time for semimartingales, which generalizes partially Lévy's downcrossing theorem on brownian motion. In the present note we propose to deduce this result directly from the dominated convergence theorem of stochastic integrals, so our proof is much simpler than the original one.