关于Zorn的一个问题

施咸亮

（杭州大学）

最近，G. Schober 教授告诉作者 M. Zorn 教授提出的下述问题，设 $\varphi(t)$ 是 $[0,1]$ 上的复值函数，$\Delta=\{t_k\}_{k=0}^{n}$ 是$[0,1]$的分划，分划直径记作$\|\Delta\|=\max_k|t_k-t_{k-1}|$。设 $p>0$，假如 $\varphi(t)$ 满足

$$\lim_{\delta\to+0}\sup_{\|\Delta\|\leq\delta}\sum_k|\varphi(I_k)|^2=0,$$

其中 $I_k=[t_{k-1},t_k]$，$\varphi(I_k)=\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})$，则说 $\varphi(t)$ 属于类 Z_p。M. Zorn 证明[1]，设 C：$z=\varphi(t)$ $(0\leq t\leq 1)$ 是 z 平面上连续曲线，那么为使 Riemann 积分$\int_c f(z)dz$ 对一切在C上解析的 $f(z)$ 都存在的充要条件是 $\varphi(t)\in Z_2$。

问题 刻划函数类 Z_2。

一般地，设 $\psi(t)$是$[0,\infty)$上连续，不减函数，$\psi(0)=0$。若 $\varphi(t)$ 满足

$$\lim_{\delta\to+0}\sup_{\|\Delta\|\leq\delta}\sum_k\Psi|\varphi(I_k)|=0,$$

则说 $\varphi\in Z_\psi$。我们证明了下述的

定理 1 i）记 Z_0 为常数函数全体。那么 $Z_\psi=Z_0$，当且仅当 $\overline{\lim\limits_{t\to+0}}\psi(t)/t>0$；ii）设 $Z_\psi\neq Z_0$。那么 $\varphi(t)\in Z_\psi$ 当且仅当 α）$\varphi(t)\in C[0,1]$，β）存在 $M>0$ 和 $\lambda_k\uparrow\infty$ 使对 $[0,1]$上一切满足 $|J_k|\downarrow$ 的不重叠区间列$\{J_k\}$成立 $\Sigma_k\lambda_k\Psi(|\varphi(J_k)|)<M$。

系 若 $Z_\psi\neq Z_0$，则$\{C[0,1]\cap BV[0,1]\}\subset Z_\psi$。

集 $C[0,1]\cap BV[0,1]$和 Z_ψ 差异究竟有多大？下述定理从可微性方面给出了描述。

定理 2 设 $\psi(t\log\frac{1}{t})=o(t)$ $(t\to+0)$，那么存在函数 $\varphi(t)\in Z_\psi$，它在$[0,1]$上几乎处处不可以求导。

周知，BV 函数是几乎处处可求导的。

参考文献

[1] Zorn, M. A. Approximating Sums, Amer. Math. Monthly, 54(1947), 148—151.