第5卷 第2期
1985年4月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.2
April 1985

数学抽象度概念与抽象度分析法*

徐利治 张鸿庆

（大连工学院应用数学研究所）

§1 引 言

本文将给出“数学抽象度”的一般概念并论述“抽象度分析法”的基本概要。

如所熟知，抽象是认识事物本质、掌握事物内在规律的方法。凡科学中的一切概念都是抽象过程的产物，而且都有不同程度的抽象性。数学中的许多概念的抽象性更是明显地经过一系列阶段而产生的。例如，整数、有理数、无理数、复数、函数、微分、积分、变分、泛函、范畴等这些概念的抽象性几乎是一个高于一个。这说明数学内部各个概念的抽象程度是不一样的。在本文中我们要引进抽象度概念，用以刻划一个概念的抽象性层次；并将引进抽象难度向量，试图描述一系列抽象过程的难易性程度；还将提出一种分析抽象度的方法，可以用于数学领域的各个分支和各门课程。

分析抽象度和抽象难度至少有三方面的意义：一是可以帮助我们查明各个数学概念的层次性结构和复杂性程度，看清楚概念层次性结构的规律，从而有助于发现简化概念层次结构和扩充或精化概念结构的可能性。因此这对于开展数学研究工作是有意义的。二是可以帮助我们找出概念和定理的原型，真正弄懂它们的含义，掌握理论的来龙去脉并洞察过程的全貌，还能了解概念层次结构中各步骤的难易程度。这对于数学教学设计也是很有参考价值的。三是这种分析研究能帮助理解抽象思维的能动性法则，给反映论提供具体例证并增添提炼具体认识发展规律的素材，因此对丰富思维科学内容也能起到积极作用。

上面说明了抽象度分析研究的积极意义。但是本文只限于对有关问题作初步探讨，更深入的研究还有待于今后的工作。

§2 抽象与严格偏序

通常，“抽象”有两种含义，一是指从许多事物中舍弃个别的非本质的属性，抽出共同的本质属性（这主要是指抽象过程而言）；二是指那种偏离具体经验较远，因而不太容易理解的对象（这主要是指抽象概念本身而言）。这里，为了更精确地刻画数学领域中抽象性的含义，我们将叙述强抽象和弱抽象这两个概念。但是本文中使用“抽象”一词的含义，有时比上述的含义要广，我们还必须引进广义抽象概念。

*1984年11月3日收到。本文内容曾在武汉市湖北省计算数学年会上报告过。

1．弱抽象 弱抽象也可以叫做概念“扩张式抽象”，即从原型中选取某一特征(侧面)加以抽象，从而获得比原结构更广的结构，使原结构成为后者的特例．例如，采用概念外延的逻辑包含关系，有

欧氏空间⊂内积空间⊂距离空间⊂拓扑空间．我们说内积空间比欧氏空间更抽象，距离空间比内积空间更抽象，拓扑空间比距离空间更抽象．可分别记以欧氏空间$\prec$内积空间，内积空间$\prec$距离空间，距离空间$\prec$拓扑空间．也可以联在一起写成一条抽象概念链

欧氏空间$\prec$内积空间$\prec$距离空间$\prec$拓扑空间

其中$\prec$是构成链的序关系．上述抽象方法的过程是先考虑具体事物有哪些性质，将刻画事物本质的性质抽出来，然后考虑具有这种性质的一切事物．例如考察欧氏空间内积具有的性质，然后抽出它的基本性质作为内积公理，抛却欧氏空间内积的具体形式，而把一切满足内积公理的关系都叫作内积，具有内积的线性空间叫作内积空间．内积空间比欧氏空间广，但内积空间中的拓扑结构比欧氏空间弱．因此概念扩张式抽象是一种减弱结构法，我们把它叫作“弱抽象”．

2．强抽象 强抽象也可以叫做“强化结构式抽象”，即通过引入新特征强化原结构来完成抽象．例如对线性空间引进拓扑结构便构成线性拓扑空间．我们认为线性拓扑空间比线性空间更抽象，记以线性间空$\prec$线性拓扑空间．又如在函数概念中引进连续性概念（结构)，构成连续函数概念．我们认为连续函数比函数抽象，记以函数$\prec$连续函数．类似地，在强描象意义下有如下的概念链

函数$\prec$连续函数$\prec$可微函数$\prec$解析函数

虽然从外延包含关系看，我们有

解析函数⊂可微函数⊂连续函数⊂函数

总之，上述过程是在原结构（概念结构的某种原型）中增添某一特性，通过抽象获得比原结构内容更丰富的结构，使后者成为前者的特例．因为这种抽象方法是一种加强结构法，故可叫作“强抽象”．

一般说来，被人们最先认识的一些较具体较直观的事物对象，如果其内容结构（或概念内涵）非常丰富，则就成为弱抽象的原型．反之，如果内容结构形式非常贫乏或不够丰富，则就往往成为强抽象的出发点．

3．广义抽象 除了强抽象和弱抽象以外，还可以有各种意义下的抽象．例如若定义概念B时用到了概念A，或者证明定理B中用到定理A时，我们可以说B比A抽象，记以$A\prec B$．例如定义函数极限时用到函数概念，我们说函数极限比函数抽象，记以函数$\prec$函数极限．类似地我们有函数极限$\prec$连续函数．

凡数学中确立的各种基本概念、定义、公理、定理、模型、推理法则、证明方法等等都可叫作“数学抽象物”或“抽象物”．假设给定了一个数学抽象物P，则所有与P在逻辑上等价的抽象物构成一个等价类．凡是属于同一等价类的元素我们一律不加区分，视为同一元素．

一般地说，若在某一分支的数学抽象物之间定义了一种比较抽象性程度的方法，也就定义了一个顺序(记以$\prec$)．无论我们给出什么样的“抽象性”定义，介于抽象物之间的顺序关系必须满足下列二条件：

（i）若$A\prec B$，$B\prec C$，则$A\prec C$。即若B比A抽象，C比B抽象，则C比A抽象。

（ii）对于任何两个抽象物A和B，或者$A\prec B$，或者$B\prec A$，或者A和B之间无法确定那个更抽象。这三种情况中必有一种且只有一种情况出现。

这样，在给定的"抽象"意义下（注意在一组抽象物系统中可以容许分别采用弱抽象、强抽象和广义抽象中的任何一种意义），一个数学分支或某一特定数学专题范围内的全部抽象物的集合（有限集）M便构成一个严格偏序集（M，$\prec$）。

若抽象物A和B属于M并且$A\prec B$，则称$A\prec B$为链，A叫作链的始点，B叫做链的末点。若给定链$A\prec B$和$B\prec C$，这两个链可以拼接成$A\prec B\prec C$，它就叫作前两个链的扩张链。对给定链$P_1\prec P_2\prec\cdots\prec P_m$，若能找到另一链$Q_1\prec Q_2\prec\cdots\prec Q_n$使$Q_1=P_m$或$Q_n=P_1$，则称前一链是可扩张的。若链$P_1\prec P_2\prec\cdots\prec P_m$上再不能添加新的抽象物，即不存在形如$P_1\prec\cdots\prec P_{i-1}\prec Q\prec P_i\prec\cdots\prec P_m$的链，则称该链为完全的。若一个链既完全又不可扩张，则称这个链是"完全不可扩张的"。整个集合M是一些"完全不可扩张链"的并集。若抽象物A与B位于同一链上，则称A与B为"相联"，否则称它们为"不相联"。应用组合论的中著名的Dilworth分解定理可以导出下述命题：

对于一个给定的数学抽象物集合M而言，其中所含的不相联抽象物的最大个数，即等于M被分解成相联抽象物的链的最少条数。

这个命题的所以成立，就是因为（M，$\prec$）构成一个偏序集的缘故。往后即可看到，"图论"也是处理抽象度分析法的一个重要工具。我们甚至可以不无理由地予见到：抽象度分析法的进一步发展中势必要借助于数理逻辑、泛系分析、模糊数学乃至现代实验心理学等工具。

§3 抽象度的一般概念

"数学抽象度"（Mathematical Abstraction Degree）应该反映抽象物所具有的抽象性层次。因为每一抽象物都是经历一个抽象过程而形成的概念结构，所以处于一条链上的诸抽象物的个数就代表着抽象层次数。因此我们很自然地想到用链的长度来规定"抽象度"。我们要求抽象度概念只和所涉及的抽象物本身有关，而且具有某种"可加性"。

1．相对抽象度 最有用的是"相对抽象度"概念。设P与Q是抽象物集合M中的任何一对相联元素。如果在M中有一条完全的链（即其中再也插不进另外元素的链）：

$$(\lambda):\ P\prec P_1\prec\cdots\prec P_{r-1}\prec Q$$

则链(λ)的长度r即定义为Q关于P的相对抽象度，记作$\deg(Q|P)=r$。这里的(λ)链也可表示为$[P,Q]_r$，其中r即表示链的长度。注意，在不相联元素间，由于不存在抽象（弱抽象、强抽象或广义抽象）过程，所以无需定义相对抽象度。

上述关于相对抽象度的定义并不适用于一般情形。如果联结P与Q的完全链存在S条：$(\lambda_1),(\lambda_2),\cdots,(\lambda_s)$，且长度分别为$r_1,r_2,\cdots,r_s$，则按上述定义法，抽象度$\deg(Q|P)$就不能一意确定了。此时最简单的办法可取$(r_1,\cdots,r_s)$中的最大值作为抽象度，即规定

$$\deg(Q|P)=\max\{r_1,\cdots,r_s\}.$$

这样定义的抽象度便只和P，Q有关。至于取最大值的意思无非表明抽象度是通过最精细

的抽象层次的划分方式来决定的。

如果 $\deg(Q|P)=r=\max\{r_1,\cdots,r_s\}$，则相应的最长完全链（$\lambda$）$\equiv[P,Q]_r$ 即称为表示该抽象度的“典型链”。典型链可以不止一条，但可任取其一。注意，在典型链链$(\lambda)\equiv[P,Q]_r$ 上抽象度具有可加性：如果 S 和 T 是(λ)上的任意两个抽象物且 $S\prec T$，则 $[P,Q]_r$ 的子链$[P,S]$，$[S,T]$，$[T,Q]$也都是最长完全链，故可知

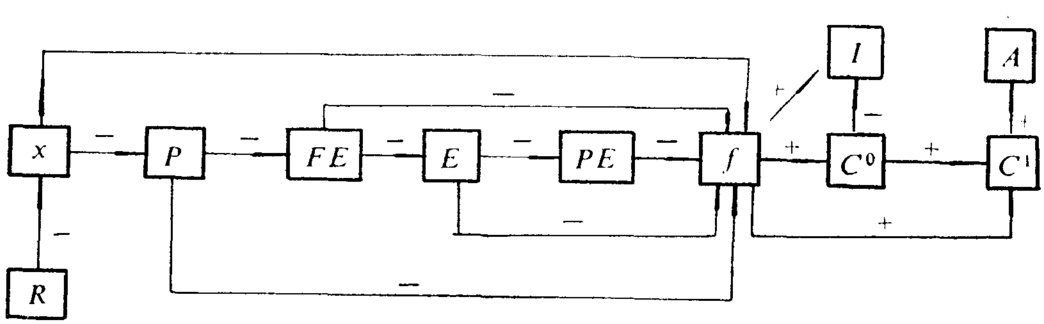
$$\deg(T|P)=\deg(T|S)+\deg(S|P)$$

$$\deg(Q|P)=\deg(Q|T)+\deg(T|P)=\deg(Q|S)+\deg(S|P)$$

但如果 S 不在典型链(λ)上，则通常只能有下述不等式关系：$\deg(Q|S)+\deg(S|P)\leqslant\deg(Q|P)$。

2. 简单例子 如果 $P\prec Q$，则当过程为强抽象时记作 $P\xrightarrow{+}Q$，为弱抽象时记作 $P\xrightarrow{-}Q$。如为广义抽象则记作 $P\to Q$。现在举一个分析学中的简单例子来说明相对抽象度的计算法。

采用字母 R，x 等表示如下一系列数学抽象物(数学分析中的熟知概念)：
R：常量，x：变量，P：多项式，FE：基本初等函数，E：初等函数，PE：分段初等函数，f：函数，C^0：连续函数，C^1：可微函数，A：解析函数，I：黎曼可积函数。
于是可以形成如下的链：



由此图易看出 $[R,f]_6$，$[R,C^1]_8$，$[R,A]_9$ 均为典型链。因此立即可写出 $\deg(x|R)=1$，$\deg(P|R)=2$，$\deg(PE|R)=5$，$\deg(f|R)=6$，$\deg(C^1|f)=\deg(I|f)=2$，$\deg(A|C^0)=2$，$\deg(C^0|f)=\deg(I|C^0)=\deg(C^2|C^0)=1$，$\deg(f|P)=4$，$\deg(I|R)=8$，$\deg(A|R)=9$。由上可以看到黎曼可积函数与解析函数的相对抽象度都是较大的，事实上它们都是通过漫长的岁月才完成的概念。数学史已经证实这一点。

3. 交汇点与分叉点 偏序集（M，$\prec$）中的抽象物可用点表示，关联的抽象物之间都可用有向线联结，这样便得到一个有向图。现在来引进交汇点与分叉点两个概念。

若 P 点是至少两个不同链的末点，则称 P 为“交汇点”；又若 P 是至少两个链的始点，则称它为“分叉点”。特别，我们把完全不可扩张链的始点叫做零级交汇点，于是可定义一般交汇点的“级”。假设从一个交汇点 P 出发，按反序方向走到零级交汇点，在所有可能的途径中至少有一条途径（链）上交汇点个数最多，就把这个链上交汇点的个数 k（包括 P 点本身但不包括始点——零级交汇点）叫做交汇点 P 的级。交汇点代表着（M，$\prec$）中

至少有两条链在那里汇聚的抽象物，故在M中具有较大的重要性。例如在上面介绍的简单例子中，R便是零级交汇点，f为一级交汇点，C^1和I为二级必汇点。显然，函数、可微函数与黎曼可积函数等概念在链中确实居于较重要的位置。类似地，分叉点作为几个概念的出发点也有其基本重要性。在上述例子中的x、P、FE、E、f和C^0都是分叉点。

凡从分叉点引出的链的条数以及在交汇点处汇聚的链的条数可分别叫作该点的"出度"和"入度"，分别记作$d^+(\cdot)$和$d^-(\cdot)$。例如在上面提到的例子中函数概念f的入度与出度分别为

$$d^-(f)=5,\qquad d^+(f)=3.$$

表这明f在整个概念链结构中居于最重要的位置。

4．三元指标　给定一个抽象物集合所成的偏序集（M，$\prec$）。取定M中的一元素S作为始点。考虑由S出发引出的一切链。记这个链系统为Σ。设X为Σ中某链上的元素，则可计算相对抽象度$\deg(X|S)$，简记作$\deg(X)$。在Σ系统中还可计算X的入度$d^-(X)$与出度$d^+(X)$。于是关于X的三元数组$\{\deg(X),\ d^+(X),\ d^-(X)\}$便叫作概念$X$的"三元指标"（Index Triple），记作

$$\mathrm{ind}(X|S)=(\deg(X),\ d^+(X),\ d^-(X)).$$

例如在前页所举的简单例子中易见

$$\mathrm{ind}(f|R)=(6,3,5),\ \mathrm{ind}(P|R)=(2,2,1),\ \mathrm{ind}(C^0|R)=(7,2,1).$$

特别，如果X不是交汇点或分叉点，则可记作$d^-(X)=1$和$d^+(X)=1$。

由上可知，三元指标能用以表明一个抽象物的更全面的信息。事实上，$\deg(X)$、$d^+(X)$和$d^-(X)$三个数值分别刻划了抽象物X的深刻性、基本性和重要性程度。这些数值越大，就表明X越深刻、越基本和越重要。

附记　（一）我们所举的简单例子是一个有向多重图。显然，一般的"有向多重图理论"（特别是有权图理论）可以作为分析概念系统（M，$\prec$）的有效工具。还有图论中的"邻接矩阵"、"关联矩阵"和"有向树"等概念对分析（M，$\prec$）的结构也很有用。特别有意义的是，矩阵表示法还可以帮助把系统（M，$\prec$）的信息存放到计算机中。

（二）可以有多种方式定义抽象度概念。事实上，我们还可以给出更广的"抽象级"（Abstraction Order）的概念。如果Σ_0是一组基本概念或基本公理，则不妨规定它为0级抽象物（这实际是一个概念集合）。凡是直接由Σ_0中的一些抽象物经过指定方式引出的抽象物又构成一个集合Σ_1，就可叫作1级抽象物。遵循归纳法步骤，凡是从n级抽象物（集合）Σ_n及其下各级抽象物经过某些指定方式直接引出来的抽象物集合Σ_{n+1}就叫作$n+1$级抽象物（注意Σ_{n+1}中的抽象物至少有Σ_n中的抽象物作为其原型或基础）。这样便得到抽象级的链：

$$\Sigma_0\prec\Sigma_1\prec\cdots\prec\Sigma_n\prec\cdots$$

特别，如果我们把（M，$\prec$）中的k级交汇点集合作为Σ_k，则也构成抽象级链。如果对各个Σ_k中的抽象物规定一个统一的抽象度并对诸交汇链与分叉链上的抽象物用均分法界定其抽象度（此时抽象度可以取有理数值），则就可以规定出一种与路径无关的抽象度概念。限于篇幅，这里就不讨论这种较复杂的抽象度定义了。

§4 略论抽象法则与抽象难度

人们会问：数学中的抽象过程是怎样实现的呢？一般地依据哪些法则或原则？每一步抽象的困难程度又如何？显然这些都是抽象度分析中十分重要而又比较困难的问题。这里只能略作探讨。

首先可以指出，弱抽象法则的基本依据是“特征分离概括化原则”或简称“特征概括原则”。这是一个工作原则，它的运用包括下列步骤：先将一个结构内容较丰富的原型进行分析，把其中某个或某类特性分离出来，用形式化的数学语言把它表述出来。然后通过概括原则（Principle of Comprehension）把它规定为一个普遍范畴，或者把所有具备该形式化特性的对象考虑成一个系统或族类。

完成强抽象过程的手段是多种多样的。但最常用的基本原则可以称之为“关系定性特征化原则”。这也是一条工作原则，它的运用包括两个步骤：首先是在一个系统的对象之间引入某种新的关系（例如可以是某种映射、对应关系或运算法则等等），从而在形成的新的关系结构中，把可能出现的某种性质作为特征规定下来。最后也通过概括原则把它规定为一个普遍范畴或某种普遍属性。

例如，代数系统的同态与同构、拓扑的同胚、置换群的正规子群与商群、Cantor的超限基数与序数及其运算法则、数理逻辑中的Gödel序数，还有函数的可微性与可积性等等概念的界定都是上述“关系定性特征化原则”的具体应用之例。事实上，凡数学中利用映射对应法则或是借助于新运算来引出新对象新概念的方法也都是属于上述一般原则的运用范围。这方面的例子真是举不胜举。

为了说明“抽象难度”的含义，这里不妨对自然数集合概念的抽象过程作一简单分析。试把现实生活中出现的具体数量（如三个人、五棵树等等）记为 $\sum_0$ 并规定其抽象度为0。于是各个自然数（如3，5等等）的抽象度便是1。显然从个别自然数过渡到一般自然数 n 又是一次抽象，因此 $\deg(n|\sum_0)=2$。再应用概括原则可以得出一切 n 作成的自然数集合 $Z_+:=\{n\}$。于是

$$\deg(Z_+|\sum_0)=3.$$

显然这最后一步的抽象要比前两步困难得多[1]。事实上，直觉主义者就始终不能接受集合 Z_+ 的概念。自然人们有理由把这最后一步的抽象难度规定（或评定）为特大难度。

通常，一个抽象物 P 如果由 k 步抽象形成，则各步的难易程度可以差别很大，所以应该对每一步抽象的难易进行分析，给以不同的等级。但是一般说来，每步抽象的难易程度是不易确定的。或许可以用“实验心理学”中的方法，通过对大批学习者测定他们弄懂各步抽象概念所花费的平均小时数来衡量难易程度。另一种较简易的方法是通过有经验的教师或专家们用共同评定或投票的办法来确定各种抽象步骤的难度等级，比方说可以分为四个等级：小难度、中难度、大难度、特大难度。它们可分别记作 Δ_1，Δ_2，Δ_3，Δ_4。当然人们也可以把等级分得更多一些。但既然是用评定办法，就不免会杂有主观成份，因此所得结果仅有参考价值。

假设给定一个完全链 $S\prec P_1\prec P_2\prec\cdots\prec P_n$；则 P_n 对这个链的难度可以用一个 n 维向

量表示

$$\mathrm{dif}(P_n)=\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n\}$$

这里每个 δ_i 仅取 Δ_1，Δ_2，Δ_3，Δ_4 中之一值。对于任给两个抽象物 P 和 Q，即使它们在同一系统中具有相同抽象度，也未必能比较它们之间的难易程度。比如设

$$\mathrm{dif}(P)=\{\Delta_1,\Delta_3,\Delta_4\},\ \mathrm{dif}(Q)=\{\Delta_2,\Delta_4,\Delta_2\}$$

二者就无法比较其难度。

§5　抽象度分析法概述

给定某一数学分支的全部或部份数学抽象物的集合 M。如果要对 M 中的元素作全面的抽象度分析，则需要采取下列诸步骤：

1°　给定"抽象"的意义，将 M 排成偏序集，使其中每一条链都表现为不可扩张的完全链。

2°　将 (M, $\prec$) 画成有向图，标明每一步的抽象意义（强、弱、广义）。必要时再标明各步采用的抽象法则或原则。

3°　将偏序集中的各个极小点作为始点计算各条链上的各个点的一组相对抽象度。

4°　计算图中每一点的入度和出度，于是每一点 X 都可获得一个或若干个三元指标 $\mathrm{ind}(X)$。注意这个指标中的抽象度 $\deg(X)$ 与选取的始点有关。

5°　从每一始点出发作各个关联点的抽象难度向量。

如有需要，还可以应用一些统计学方法计算集合 M 的平均抽象度与平均抽象难度等等。

如果只是要求对指定对象 $Q\in$ M 计算 $\deg(Q|P)$，$\mathrm{dif}(Q|P)$ 及 $\mathrm{ind}(Q|P)$，则就需要找出 $[P,Q]$ 的最长链(完全链)并在以 P 为始点的一切链的系统中计算 Q 点的入度与出度，从而得到 $\mathrm{ind}(Q|P)$。最后再把难度向量和各步所使用的抽象法则标示出来，这样就可作出关于 Q 相对于 P 的抽象度分析表。

对于一个数学分支(或一个数学理论体系)而言，为方便计也可以把它的全部公理（或作为推理出发点的全部基本命题）考虑成一个统一的始点。这样用有向图表示的偏序集 (M, $\prec$) 就只有一个极小点(最小点)。于是按上述1°—5°所作的分析就可以大加简化。特别，我们可以对那些入度与出度超过 2 或 3 的点作它们的抽象度分析表，这样就可以作成 M 中一批重要抽象物的分析表册。假如关于各门数学课程也都作成这种抽象度分析表册，那末对数学教学显然是很有参考价值的。特别对提高教学水平与质量会起到积极作用。

作为本文结尾，这里给出 Cantor 超限基数 $\aleph_0$ 的抽象分析一例。熟知 $\aleph_0$ 是自然数集合 Z_+ 的基数，它是一切与 Z_+ 等价的集合类的共同标志，是利用"一一对应确定等价关系"的原则(即§4中所述的强抽象法则)抽象出来的概念。我们可以评定这一抽象过程是大难度的。当然，从有限离散数量抽象出各个自然数也用到了同一原则，自然应属于同样难度。至于从个别自然数过渡到一般的任意自然数 n 却不太困难，可以评定为小难度。于是我们有

$$\mathbf{deg}(\aleph_0|\sum_0) = \mathbf{deg}(\aleph_0|Z_+) + \mathbf{deg}(Z_+|\sum_0) = 1+3=4$$
$$\mathbf{dif}(\aleph_0|\sum_0) = \{\Delta_3, \Delta_1, \Delta_4, \Delta_3\}.$$

注意在完全链 $[\sum_0, \aleph_0]_4$ 中的第三步引出了全体自然数作成无穷集合的概念，这一步具有特大难度 Δ_4.

形成 $\aleph_0$ 概念的抽象法则是：第一步用的是关系定性特征化原则，第二步与第三步都是应用了特征分离概括化原则，第四步使用的原则和第一步相同，只是在不同的基础上使用同一原则而已.

注意关于自然数的 Peano 公理也包含三步抽象：1，继元 n^+ 和归纳公理. 由此同样可得出 Z_+ 的抽象度为 3（这里我们按实无限观点看待归纳公理）. 利用 Dedekind 的有理数切割概念还可进一步示明实数连续统 R 的抽象度为 $\deg(R|\sum_0)=5$. 我们还计算了 Cauchy 意义下的导数与积分等概念的抽象度. 但是还有许多问题尚未考虑. 希望对数学抽象度分析法感兴趣的读者能结合科研或教学需要开展进一步的研究.

参 考 文 献

[1] 徐利治，数学方法论选讲，第9讲§3，华中工学院出版社1983年4月第一版.

Concerning the Concept of Mathematical Abstraction Degree and a Method of Abstraction Degree Analysis

Xu Lizhi (*Hsu, L. C.* 徐利治) *Zhang Hongqin* (张鸿庆)

Abstract

Every mathematical concept X considered as an abstract thing can be precisely reached through a whole process of abstraction involving a number of steps. The maximal number of steps involved may be defined to be the abstraction degree deg (X) for X. Various abstract things belonging to a branch of mathematics generally form a poset $(M, \prec)$ which can be described by a multiple directed graph. Thus both the graph theory and the theory of posets apply to our abstraction degree analysis (ADA).

For every P and X of M we define the relative abstraction degree $\deg(X|P)=r$ for X with respect to P provided that $[P, X]$ just contains a maximal chain of length r within$(M, \prec)$. Moreover, an index triple is defined by the following

$$\text{ind }(X|P) = \{\deg\ (X|P),\ d^+(X),\ d^-(X)\}$$

where $d^+(\cdot)$ and $d^-(\cdot)$ denote the outdegree and indegree respectively. In this paper two main types of abstraction process, so-called the weak abstraction and the strong abstraction, have been distinguished from each other. Also two general working principles used respectively for the two different types of abstraction have been formulated and discussed. Finally, it has been pointed out among others that the abstraction degrees for the set of positive integers Z_+, the Cantorian aleph-null and the real continuum R are given by $\deg(Z_+)=3$, $\deg(\aleph_0)=4$, $\deg(R)=5$, respectively.