第5卷 第2期
1985年4月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.2
April 1985

关于 Dulac 函数的结构问题*

吕启龙

(吉林工学院)

本文讨论极限环理论中的 Dulac 函数的结构问题，首先分析关于不存在极限环的 Bendixson 定理的局限性以及 Dulac 定理的作用，然后给出 Dulac函数的一个常用的结构式，最后用一些例子来说明这个结构式的用法，和它在判定不存在极限环问题上的应用。

§1 Dulac 函数的概念

我们研究二阶动力系统

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\qquad \frac{dy}{dt}=Q(x,y) \tag{1}$$

不存在极限环的充分条件，假设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 是一次连续可微函数。I. Bendixson 提出一个用发散量判定不存在极限环的准则，这就是我们所说的Bendixson定理：如果在相平面的单连通域 G 内，系统(1)的发散量

$$\operatorname{div}(P,Q)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$$

保持常号，且不在G的任何子域内恒等于零，则系统(1)不存在全部位于域G内的闭轨线和奇异闭轨线(可参看[2]定理 1.10)。

对于一定的系统(1)和一定的区域G，发散量$\operatorname{div}(P,Q)$往往不在G内保持常量，这就使得Bendixson定理的应用受到限制。究其原因，不外以下两点：一是由于函数P，Q固定，没有调整的可能；二是由于区域G固定，没有灵活的余地。因此，在改进这个定理时，首先应该给系统(1)的右端函数加进可调整的因素，并适当选择这个因素，以保证发散量的常号性；其次应该将区域G 划分成几个单连通子域，使得发散量在各子域内保持常号，且不存在与子域边界相交或相切的闭轨线。这样就保证了系统(1)在域 G 内不存在闭轨线。

H. Dulac[3]改进了 Bendixson 定理，而得我们所说的 Dulac 定理：如果在相平面的单连通域 G' 内存在一次连续可微函数$B(x, y)$，使得

$$D(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(BP)+\frac{\partial}{\partial y}(BQ)$$

*1981 年11月 9 日收到。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

在G'内保持常号，且不在G'的任何子域内恒等于零，则系统(1)不存在全部位于G'内的闭轨线和奇异闭轨线(可参看[2]定理1.11)。

现在用时间变换的观点，来解释这个定理。在系统(1)中进行变换

$$dt=B(x,y)d\tau, \tag{2}$$

便得系统

$$\frac{dx}{d\tau}=B(x,y)P(x,y),\qquad \frac{dy}{d\tau}=B(x,y)Q(x,y), \tag{3}$$

此系统发散量恰等于$D(x,y)$。可见关于系统(1)的Dulac定理相当于关于系统(3)的Bendixson定理，而Dulac方法的实质就是，先对系统(1)进行变换(2)，再对变换后的系统(3)应用Bendixson定理，然后根据系统(3)不存在闭轨线的事实，来断定系统(1)不存在闭轨线。

与系统(1)相比，系统(3)的右端有了可以调整的因素$B(x,y)$，而区域G'又是可以灵活地选取的，所以发散量$D(x,y)$的常号性比较容易实现。

我们将函数$B(x,y)$称为Dulac函数。

§2 Dulac函数的结构

Dulac方法的关键，在于选取适当的Dulac函数$B(x,y)$，使$D(x,y)$在G的单连通子域G'内保持常号。但是，迄今为止还没有见到关于Dulac函数的结构规律的论述。这里我们根据前面对Dulac函数的作用的分析，和我们所见到的一些Dulac函数的例子，归纳出它的一种常用的结构式：

$$B(x,y)=[\pm l_1(x,y)]^{k_1}\cdot[\pm l_2(x,y)]^{k_2}e^{q(x,y)}, \tag{4}$$

其中$l_1(x,y)$。$l_2(x,y)$都是x，y的一次函数，$q(x,y)$是x,y的多项式，一般是二次的，而l_2。l_2，q的系数以及k_1，k_2都是待定常数，确定这些常数的原则是，使$D(x,y)$在指定的区域G'内保持常号。

需要指出，这种结构式对二次系统特别有用，而对于其他系统却未必是最好的。

还需要指出，$l_1(x,y)=0$与$l_2(x,y)=0$应该是与系统(1)的闭轨线既不相交也不相切的直线(以后我们将这种直线简称为不切直线)，其原因如下：由结构式(4)可知，在直线$l_1(x,y)=0$和$l_2(x,y)=0$上，或者有$B(x,y)=0$，或者有$B(x,y)=\infty$，且此二直线最多能将区域G分成四个单连通子域。在其中每个子域内，$B(x,y)$是一次连续可微函数，且不为零，所以变换(2)是拓扑变换，系统(1)与(3)轨线的拓扑结构相同，从而此二系统或者同时有闭轨线，或者同时没有闭轨线。如果$D(x,y)$在各子域内都保持常号，则系统(1)的任一闭轨线都不可能全部位于任一子域内，而由于直线$l_1(x,y)=0$与$l_2(x,y)=0$都是不切直线，又没有与子域边界相交或相切的闭轨线，从而系统(1)在整个域G内没有闭轨线。当然，如果只能保证$D(x,y)$在某一个子域内常号，那就只能断定系统(1)在此子域内没有闭轨线。

在构造Dulac函数时经常用到的不切直线，一般有以下几种：

(1) 系统(1)的积分直线。它显然是不切直线。

(2) 系统(1)的分界线在鞍点的切线。下面就系统(1)是二次系统的情形，证明这种

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

切线是不切直线。我们知道，经过非奇异线性变换，可将原点移到鞍点，将分界线在鞍点两条切线变成两条坐标轴，并将系统(1)化成

$$\frac{dx}{dt}=\lambda_1 x+a_1x^2+b_1xy+c_1y^2,\qquad \frac{dy}{dt}=\lambda_2 y+a_2x^2+b_2xy+c_2y^2,$$

其中 λ_1，λ_2 是系统(1)的线性近似系统的两个实特征根(见[4]，49)。在 $c_1\neq0$ 时，由于

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=0}=c_1y^2!$$

保持常号，可知轨线在与直线 $x=0$ 相交时，皆由其同一侧穿向另一侧，所以 $x=0$ 是不切直线。在 $c_1=0$ 时，由于

$$\frac{dx}{dt}=x(\lambda_1+a_1x+b_1y),$$

可知 $x=0$ 是积分直线。同理可证，直线 $y=0$ 也是不切直线。

总之，分界线在鞍点的切线都是不切直线。

(3)　过系统(1)的结点且与特殊方向相切的直线。用与前面类似的方法可证，这种直线也是不切直线。

(4)　$P(x,y)=0$的铅直渐近线和 $Q(x,y)=0$ 的水平渐近线。这主要是指二次系统而言的。如果 $P(x,y)=0$ 是双曲线且有铅直渐近线 $x=a$，则由于它位于双曲线的二分支之间，可知

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=a}=P(a,y),$$

定号，所以 $x=a$ 是不切直线。同理，如果 $Q(x,y)=0$ 是双曲线且有水平渐近线 $y=b$，则 $y=b$ 也是不切直线。

注意，$P(x,y)=0$与$Q(x,y)=0$的斜渐近线，在一定的条件下也可以成为不切直线。

(5)　其他不切直线。例如使 $P(m,y)$ 保持常号的直线$x=m$，使 $Q(x,n)$ 保持常号的直线 $y=n$ 等，都是不切直线。

§3　Dulac 函数举例

现在举出一些Dulac函数的例子，来说明结构式(4)的用法，以及它在判定不存在极限环问题上的应用。需要指出，这里的大多数例子在理论上或实际应用中都有一定的意义。

例 1　$$\frac{dx}{dt}=xy,\qquad \frac{dy}{dt}=2+y-x^2-y^2.$$

容易看出，$x=0$是积分直线。由于$2+y-x^2-y^2=(1+y)(2-y)-x^2$，可知 $1+y=0$ 和$2-y=0$都是不切直线。现在试取 Dulac 函数

$$B(x,y)=(\pm x)^{k_1}[\pm(1+y)]^{k_2},$$

这里$(\pm x)^{k_1}$中正负号的取法如下：在半平面$x>0$内取正号，在半平面$x<0$内取负号。$[\pm(1+y)]^{k_2}$中正负号的取法类似。后面也仿此规定。

这时

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$D(x,y)=\pm[2k_2+1+(k_1+k_2)y-k_2x^2+(k_1-k_2-1)y^2](\pm x)^{k_1}[\pm(1+y)]^{k_2-1}.$$

令$k_1+k_2=0$，$k_1-k_2-1=0$，得$k_1=\frac{1}{2}$，$k_2=-\frac{1}{2}$，并且

$$D(x,y)=\pm\frac{1}{2}(\pm x)^{\frac{5}{2}}[\pm(1+y)]^{-\frac{3}{2}}.$$

由此可见，在相平面被$x=0$，$1+y=0$分成的四个单连通域内，$D(x,y)$都保持定号，故都不存在闭轨线，从而在全相平面内不存在闭轨线。

在此例中还可把Dulac函数取得简单些，例如取

$$B(x,y)=(\pm x)^k,$$

这时

$$D(x,y)=[1+(k-1)y](\pm x)^k,$$

令$k=1$，即取$B(x,y)=x$，可得$D(x,y)=x$。由此也可断定在全相平面内不存在闭轨线。

例2 $\frac{dx}{dt}=x(a_1x+b_1y+c_1)$，$\frac{dy}{dt}=y(a_2x+b_2y+c_2)$，假设$\Delta=a_1b_2-a_2b_1\neq0$。

由于$x=0$，$y=0$都是积分直线，故取

$$B(x,y)=(\pm x)^{k_1}(\pm y)^{k_2},$$

这时

$$D(x,y)=\pm\{[(k_1+2)a_1+(k_2+1)a_2]x+[(k_1+1)b_1+(k_2+2)b_2]y+(k_1+1)c_1+(k_2+1)c_2\}(\pm x)^{k_1}(\pm y)^{k_2}.$$

令$\alpha=\frac{1}{\Delta}b_2(a_2-a_1)$，$\beta=\frac{1}{\Delta}(a_1(b_1-b_2)$，$\sigma=a_1c_2(b_1-b_2)+b_2c_1(a_2-a_1)$，并取$k_1=\alpha-1$，$k_2=\beta-1$，则得

$$D(x,y)=\pm\frac{\sigma}{\Delta}(\pm x)^{\alpha-1}(\pm y)^{\beta-1}.$$

由此可见，当$\sigma\neq0$时$D(x,y)$在各象限内都定号，从而在全相平面内不存在闭轨线。

此例选自文[5]，234，但该文取$B(x,y)=x^{\alpha-1}y^{\beta-1}$，这时只能断定在第一象限内不存在闭轨线。

例3 $\frac{dx}{dt}=-y+\delta x+lx^2+ny^2$，$\frac{dy}{dt}=x$。

由于不易找到不切直线，我们取

$$B(x,y)=e^{\alpha x+\beta y},$$

这时

$$D(x,y)=[\delta+(\alpha\delta+\beta+2l)x+\alpha(-y+lx^2+ny^2)]e^{\alpha x+\beta y}.$$

令$\alpha=0$，$\beta=-2l$，可得

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$D(x,y)=\delta e^{-2ly},$$

可见当$\delta\neq 0$时，在全相平面内不存在闭轨线。

例 4　$\dfrac{dx}{dt}=-y+lx^2+mxy,\quad \dfrac{dy}{dt}=x.$

由于$-y+lx^2+mxy=(mx-1)y+lx^2$，可见当 $l\neq 0$ 时 $mx-1=0$ 是不切直线(其实它是双曲线$-y+lx^2+mxy=0$ 的渐近线)，故取

$$B(x,x)=[\pm(mx-1)]^k e^{\alpha x+\beta y}.$$

令$k=-1$，$\alpha=0$，$\beta=-2l$，可得

$$D(x,y)=\mp mlx^2[\pm(mx-1)]^{-2}e^{-2ly},$$

可见当 $ml\neq 0$ 时在全相平面内不存在闭轨线(见[6])。

此例中也可取

$$B(x,y)=e^{\alpha x+\beta y+px^2+qxy+ry^2},$$

并令 $\alpha=m$，$\beta=-2l$，$p=q=0$，$r=-\dfrac{1}{2}m^2$，则有

$$D(x,y)=mlx^2e^{mx-2ly-\frac{1}{2}m^2y^2},$$

由此可以得出同样的结论(见[2]，291)。

例 5　$\dfrac{dx}{dt}=-y+lx^2+mxy+ny^2,\quad \dfrac{dy}{dt}=x,\quad n\neq 0.$

此系统有唯一鞍点$\left(0,\ \dfrac{1}{n}\right)$，分界线在此点处的切线为

$$x-n\mu y+\mu=0,$$

其中 μ 是方程 $n^2\mu^2-m\mu-1=0$ 的正根。

现在取

$$B(x,y)=[\pm(x-n\mu y+\mu)]^k e^{\alpha x+\beta y},$$

并令$k=\mu m$，$\alpha=0$，$\beta=\mu mn-2l$，则得

$$D(x,y)=\pm\mu m(l+n)x^2[\pm(x-n\mu y+\mu)]^{\mu m-1}e^{(\mu mn-2l)y}.$$

由此可见，当 $m(l+n)\neq 0$ 时在全相平面内不存在闭轨线(见[2]，291)。

例 6　$\dfrac{dx}{dt}=1-xy^2,\qquad \dfrac{dy}{dt}=\alpha y(xy-1),\quad \alpha>0.$

由于$x=0$ 是不切直线，$y=0$ 是积分直线，$(1,1)$是唯一奇点，所以若有闭轨线，则必全部位于第一象限。我们取

$$B(x,y)=x^{-1}y^{-2}e^{-\alpha x-2y}$$

这时

$$D(x,y)=-(1-2\alpha xy+\alpha x^2y^2)x^{-2}y^{-2}e^{-\alpha x-2y}.$$

当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时 $D(x,y)$常负，从而在全相平面内不存在闭轨线。

本文初稿是在叶彦谦教授指导下写成的总结提纲，曾在1979年南京常微二次系统讨论会上报告过，其中第二部分是在与蔡燧林、廖可人、任永泰、曾昭著同志讨论后写成的。叶彦谦教授还审阅了本文，作者向他以及前面提到的四位同志表示感谢。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

参 考 文 献

[1] Bendixson, I., Sur les courbes definies par des equations differentielles, *Acta Math.*, 24, 1(1901).

[2] 叶彦谦，极限环论，上海科技出版社，1965.

[3] Dulac, H., Recherche des cycles limites, Comp. Rend., 204, 23(1937).

[4] 秦元勋，微分方程所定义的积分曲线，上册，科学出版社，1959.

[5] Андронов, А. А., Леонтовцл, Е. А., Гордон, И. И., Майер, А. Г., Калестгенная Теория Динацилеских систец вторoло норявка, «Наука»,1966.

[6] 房乃旦，一类非线性方程的极限环及积分曲线的全局结构，数学学报，15(1965), 3.

On the Problem of Structure of Dulac's Function

Lu Qi-long

(Jilin Institute of Technologh)

Abstract

This paper deals with the problem of structure of Dulac's function $B(x,y)$ in the theory of limit cycles. We give the useful structural expression and illustrate it by some examples. This expression is as follows:

$$B(x,y)=[\pm l_1(x,y)]^{k_1}[\pm l_2(x,y)]^{k_2}e^{f(x,y)},$$

where $l_1(x,y)$, $l_2(x,y)$ are linear functions of x, y, and $f(x,y)$ is quadric function of x, y, but $l_1(x,y)=0$, $l_2(x,y)=0$ must be straight lines which nontangent with a closed trajectory.

The straight lines $l_1(x,y)=0$ *and* $l_2(x,y)=0$ usually are one of following lines:

(1) an integral line of the system(1),

(2) a tangent of a separatrix of the system(1) at a saddle point,

(3) a straight line which pass on a node of the system(1) and tangentical to special direction,

(4) a vertical asymptote of the curve $P(x,y)=0$ or a horizontal asymptote of the curve $Q(x,y)=0$.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.