第5卷 第3期
1985年7月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.3
July, 1985

概率度量空间与映象的不动点定理*

张 石 生

（四川大学数学系）

概率度量空间的概念首先由 Menger [7]提出，以后许多人对这一空间的理论和应用曾进行过某些讨论(见[1-9])。本文的目的是进一步研究这一空间中映象的不动点定理。在本文的§2中，我们得出了一些新型的不动点定理，这些结果改进和加强了引文[2,3,8]中某些主要结果。

1. 预 备 知 识

有关各类概率度量空间的定义、术语、记号和性质请参考[4,5]。

以下我们处处用R表一切实数的集合，$R^+=[0,\infty)$，Z^+表一切正整数的集合，并用H表一特殊的分布函数，其定义为：当$t>0$时$H(t)=1$；当$t\leqslant 0$时$H(t)=0$。

Schweizer, Sklar 在[4]中指出：如果$(E,\mathscr{F},\Delta)$是一 Menger 空间，Δ是连续的t-范数，则$(E,\mathscr{F},\Delta)$是由邻域系$\{U_p(\varepsilon,\lambda),p\in E,\varepsilon>0,\lambda>0\}$所导出的拓扑$\mathscr{T}$的 Hausdorff 拓扑空间，其中

$$U_p(\varepsilon,\lambda)=\{x\in E,F_{x,p}(\varepsilon)>1-\lambda\}.$$

按照这一拓扑$\mathscr{T}$，我们称点列$\{x_n\}\subset E$ $\mathscr{T}$-收敛于$x_*\in E$，记为$x_n\xrightarrow{\mathscr{T}}x_*$，如果对任意的$\varepsilon>0$，$\lambda>0$，存在正整数$N=N(\varepsilon,\lambda)$，当$n\geqslant N$时有$F_{x_n,x_*}(\varepsilon)>1-\lambda$；$\{x_n\}$称为$E$中的$\mathscr{T}$-Cauchy 列，如果对任意的$\varepsilon>0$和$\lambda>0$，存在正整数$N=N(\varepsilon,\lambda)$，当$n,m\geqslant N$时，$F_{x_n,x_m}(\varepsilon)>1-\lambda$。

命题 1 [4]. 设$(E,\mathscr{F},\Delta)$是一Menger 空间. 则点列$\{x_n\}\subset E$ $\mathscr{T}$-收敛于$x_*\in E$的充分必要条件是对每一$t\in R$

$$F_{x_n,x_*}(t)\to H(t).$$

定义1 设$(E,\mathscr{F},\Delta)$是具连续t-范数Δ的 Menger 空间，设T是E的自映象。T称为在E上是$\mathscr{T}$-连续的，如果对每一序列$\{x_n\}\subset E$，当$x_n\xrightarrow{\mathscr{T}}x_*\in E$时，就有$Tx_n\xrightarrow{\mathscr{T}}Tx_*\in E$。

定义2 设$(E,\mathscr{F},\Delta)$是一Menger 空间，A是E中的子集，我们称A为概率有界的，如果

$$\sup_{t>}[\inf_{(\ \ ,\ \ \varepsilon}F_{p,q}(t)]=1.$$

*1982年2月5日收到. 中国科学院科学基金资助的课题

以后我们还将使用下面的符号，对每一$x\in E$，记

$$O_T(x,0,\infty)=\{x,Tx,\cdots,T^nx,\cdots\}.$$

本文以下，我们处处假定函数$\Phi(t)$满足下列条件(Φ)：

(Φ)：$\Phi(t)$：$R^+\to R^+$，对t不减，$\Phi(0)=0$，$\Phi^n(t)\to\infty(n\to\infty)$，$\forall t>0$，这里$\Phi^n(t)$表$\Phi(t)$的第$n$次迭代函数。

2. 主要结果

在本节中我们处处假定$(E,\mathscr{F},\Delta)$是具连续t-范数Δ的$\mathscr{T}$-完备的Menger空间，$\Phi(t)$是满足条件(Φ)的函数。

定理1 设S,T是E的$\mathscr{T}$-连续的自映象，设对任意的$x\in E$，集合$O_S(x,0,\infty)\cup O_T(x,0,\infty)$是概率有界的。再设存在函数$n(x),m(x)$：$E\to Z^+$使得$\forall x,y$和$\forall t\geqslant 0$

$$(2.1)\quad \inf_{p,q\in\{O_S(S^{n(x)}x,0,\infty)\cup O_T(T^{m(x)}x,0,\infty)\}}F_{p,q}(t)\geqslant\inf_{p,q\in\{O_S(x,0,\infty)\cup O_T(x,0,\infty)\}}F_{p,q}(\Phi(t)).$$

则对每一$x_0\in E$，迭代序列$\{S^nx_0\}$，$\{T^nx_0\}$都$\mathscr{T}$-收敛于S和T之一公共的不动点x_*。

证 任取$x_0\in E$，由(2.1)得

$$(2.2)\quad \inf_{p,q\in\{O_S(S^{n(x_0)}x_0,0,\infty)\cup O_T(T^{m(x_0)}x_0,0,\infty)\}}F_{p,q}(t)\geqslant\inf_{p,q\in\{O_S(x_0,0,\infty)\cup O_T(x_0,0,\infty)\}}F_{p,q}(\Phi(t)).$$

令$h=\max\{m(x_0),\ n(x_0)\}$，于是由(2.2)有

$$(2.3)\quad \inf_{p,q\in\{O_S(S^hx_0,0,\infty)\cup O_T(T^hx_0,0,\infty)\}}F_{p,q}(t)\geqslant\inf_{p,q\in\{O_S(S^{n(x_0)}x_0,0,\infty)\cup O_T(T^{m(x_0)}x_0,0,\infty)\}}F_{p,q}(t)$$
$$\geqslant\inf_{p,q\in\{O_S(x_0,0,\infty)\cup O_T(x_0,0,\infty)\}}F_{p,q}(\Phi(t)).$$

由(2.3)一般由归纳法可证，对任意的正整数n

$$(2.4)\quad \inf_{p,q\in\{O_S(S^{nh}x_0,0,\infty)\cup O_T(T^{nh}x_0,0,\infty)\}}F_{p,q}(t)\geqslant\inf_{p,q\in\{O_S(S^{(n-1)h}x_0,0,\infty)\cup O_T(T^{(n-1)h}x_0,0,\infty)\}}F_{p,q}(\Phi(t))$$
$$\geqslant\cdots\geqslant\inf_{p,q\in\{O_S(x_0,0,\infty)\cup O_T(x_0,0,\infty)\}}F_{p,q}(\Phi^n(t))$$
$$\geqslant\sup_{s<\Phi^n(t)}\{\inf_{p,q\in\{O_S(x_0,0,\infty)\cup O_T(x_0,0,\infty)\}}F_{p,q}(s)\},\ \forall t\geqslant 0.$$

于上式两端让$n\to\infty$取极限，并注意当$t>0$时，$\Phi^n(t)\to\infty(n\to\infty)$和$O_S(x_0,0,\infty)\cup O_T(x_0,0,\infty)$是概率有界的假定，即得

$$(2.5)\quad \lim_{n\to\infty}\inf_{p,q\in\{O_S(S^{nh}x_0,0,\infty)\cup O_T(T^{nh}x_0,0,\infty)\}}F_{p,q}(t)$$
$$\geqslant\lim_{n\to\infty}\sup_{s<\Phi^n(t)}\{\inf_{p,q\in\{O_S(x_0,0,\infty)\cup O_T(x_0,0,\infty)\}}F_{p,q}(s)\}$$
$$=\sup_{s>0}\{\inf_{p,q\in\{O_S(x_0,0,\infty)\cup O_T(x_0,0,\infty)\}}F_{p,q}(s)\}=1,\ \forall t>0.$$

于是对任给的$\varepsilon>0$，$\lambda>0$，存在正整数$N=N(\varepsilon,\lambda)$，当$n\geqslant N$时

$$\inf_{p,q\in\{O_S(S^{nh}x_0,0,\infty)\cup O_T(T^{nh}x_0,0,\infty)\}}F_{p,q}(\varepsilon)>1-\lambda.$$

故当 $n\geqslant N$时，对一切的 $p,q\in O_S(S^{n_h}x_0,0,\infty)$和任意的$\hat{p},\hat{q}\in O_T(T^{n_h}x_0,0,\infty)$，都有 $F_{p,q}(\varepsilon)>1-\lambda$，$F_{\tilde{p},\tilde{q}}(\varepsilon)>1-\lambda$。这就表明 $\{S^nx_0\}$和$\{T^nx_0\}$都是 E 中的 $\mathscr{T}$ -Cauchy 列。由 E 的 $\mathscr{T}$ - 完备性，$\{S^nx_0\}$和$\{T^nx_0\}$都$\mathscr{T}$-收斂于 E 中的某一点 x_*。由于 S 和 T 的$\mathscr{T}$-连续性，故对任意 $t\geqslant 0$ 成立

$$F_{x_*,Sx_*}(t)\geqslant\lim_{n\to\infty}\Delta\left(F_{x_*,S^nx_0}\left(\frac{t}{2}\right),\ F_{SS^{n-1}x_0,Sx_*}\left(\frac{t}{2}\right)\right).$$
$$=\Delta\left(H\left(\frac{t}{2}\right),\ H\left(\frac{t}{2}\right)\right)=H\left(\frac{t}{2}\right)=H(t).$$

即$x_*=Sx_*$。

同理可证 $x_*=Tx_*$。即 x_* 是 S 和 T 的公共不动点。定理证毕。

由定理 1 可得如下的推论：

推论1　设 T 是$(E,\mathscr{F},\Delta)$的 $\mathscr{T}$ - 连续的自映象，设对任一 $x\in E$ 集合 $O_T(x,0,\infty)$是概率有界的，再设存在 $n(x)$：$E\to Z^+$，使得对一切 $x\in E$ 和一切 $t\geqslant 0$

$$(2.6)\qquad \inf_{p,q\in O_T(T^{n(x)}x,0,\infty)}F_{p,q}(t)\geqslant\inf_{p,q\in O_T(x,0,\infty)}F_{p,q}(\Phi(t)).$$

则对每一 $x_0\in E$，序列$\{T^nx_0\}\mathscr{T}$ - 收敛于 T 在 E 中的一不动点。

证　于定理 1 中取 $S=T$，$m(x)=n(x)$，结论即得。

推论2　设 T 是 $(E,\mathscr{F},\Delta)$的$\mathscr{T}$ - 连续的自映象，设对任一 $x\in E$，$O_T(x,0,\infty)$是概率有界的。再设下之一条件成立：

(1) 存在正整数 n，使得对一切 $x\in E$ 和一切 $t\geqslant 0$

$$\inf_{p,q\in O_T(T^nx,0,\infty)}F_{p,q}(t)\geqslant\inf_{p,q\in O_T(x,0,\infty)}F_{p,q}(\Phi(t));$$

(2) 存在正整数 n，使得对一切 x 和一切非负整数 k

$$(2.7)\qquad F_{T^nx,T^{n+k}x}(t)\geqslant\inf_{p,q\in O_T(x,0,\infty)}F_{p,q}(\Phi(t))\qquad\forall t\geqslant 0.$$

则对每一 $x_0\in E$，序列$\{T^nx_0\}\mathscr{T}$-收斂于 T 之一不动点。

证　易证条件(1)和条件(2)是等价的，故结论由推论 1 得之。

定理2　设 S，T 是$(E,\mathscr{T},\Delta)$的$\mathscr{T}$ - 连续的自映象，设对任意的 $x,y\in E$ 集合 $O_S(x,0,\infty)\cup O_T(y,0,\infty)$是概率有界的。再设存在函数 $n(x),m(x)$：$E\to Z^+$，使得对一切$x,y\in E$ 和 $t\geqslant 0$

$$(2.8)\qquad \inf_{p,q\in\{O_S(S^{n(x)}x,0,\infty)\cup O_T(T^{m(y)}y,0,\infty)\}}F_{p,q}(t)\geqslant\inf_{p,q\in\{O_S(x,0,\infty)\cup O_T(y,0,\infty)\}}F_{p,q}(\Phi(t)).$$

则 S，T 在 E 中存在唯一公共不动点，而且对任一 $x_0\in E$，序列$\{S^nx_0\}$和$\{T^nx_0\}$都$\mathscr{T}$ - 收斂于这一不动点。

证　于(2.8)中取 $y=x$，则得知(2.1)成立。故由定理 1 对每一$x_0\in E$，序列$\{S^nx_0\}$，$\{T^nx_0\}$都$\mathscr{T}$ - 收斂于 S 和 T 之一公共不动点，比如 $x_*\in E$。现证 x_* 是 S 和 T 在 E 中的唯一的公共不动点。设不然 $y_*\in E$ 也是 S 和 T 的公共不动点，于是成立

$$F_{x_*,x_*}(t)=\inf_{p,q\in\{O_S(x^{n(S_*)}x_*,0,\infty)\cup O_T(T^{m(y_*)}y_*,0,\infty)\}}F_{p,q}(t)$$
$$\geqslant\inf_{p,q\in\{O_S(x_*,0,\infty)\cup O_T(y_*,0,\infty)\}}F_{p,q}(\Phi(t))=F_{x_*y_*}(\Phi(t)).$$

重复这一程序可得

(2.9) $$F_{x_*y_*}(t)\geqslant F_{x_*y_*}(\Phi(t))\geqslant\cdots\geqslant F_{x_*y_*}(\Phi^n(t))\qquad\forall t\geqslant 0.$$

故 $$F_{x_*y_*}(t)\geqslant\lim_{n\to\infty}F_{x_*y_*}(\Phi^n(t))=H(t)\qquad\forall t\geqslant 0,$$

即$x_*=y_*$。定理得证。

推论3 设定理2中的$n(x)$，$m(x)$是与x无关的两个正整数。则定理2的结论仍成立。

推论4 设$\mathscr{M}$是映$(E,\mathscr{F},\Delta)$到$(E,\mathscr{F},\Delta)$的$\mathscr{T}$-连续的映象族。设对任意的$x,y\in E$和任意的S，$T\in\mathscr{M}$，$S\neq T$，集合$O_S(x,0,\infty)\cup O_T(y,0,\infty)$是概率有界的。如果存在$n(x),m(x)$：$E\to Z^+$，使得对任二相异的$S$，$T\in\mathscr{M}$和一切的$x$，$y\in E$及一切的$t\geqslant 0$，(2.8)式成立。则$\mathscr{M}$在$E$中存在唯一的公共不动点，而且对任一$x_0\in E$，对$\mathscr{M}$中的任一映象$S$，序列$\{S^n x_0\}$都$\mathscr{T}$-收敛于这一不动点。

推论5 设$\mathscr{M}$是$(E,\mathscr{F},\Delta)$的$\mathscr{T}$-连续的自映象族。设对任意的$x,y\in E$，和任意的S，$T\in\mathscr{M},S\neq T$，集合$O_S(x,0,\infty)\cup O_T(y,0,\infty)$是概率有界的。如存在$m$和$n$：$\mathscr{M}\to Z^+$，使得对任意二相异的$S$，$T\in\mathscr{M}$和一切的$x,y\in E$及一切的$t\geqslant 0$有

$$\inf_{p,q\in\{O_S(S^{n(S)}x,0,\infty)\cup O_T(T^{m(T)}y,0,\infty)\}}F_{p,q}(t)\geqslant\inf_{p,q\in\{O_S(x,0,\infty)\cup O_T(y,0,\infty)\}}F_{p,q}(\Phi(t)).$$

则推论4的结论仍成立。

推论6 设T是$(E,\mathscr{F},\Delta)$的$\mathscr{T}$-连续的自映象。设对任意的$x,y\in E$，$O_T(x,0,\infty)\cup O_T(y,0,\infty)$是概率有界的。再设存在$n,m\in Z^+$，使得对一切$x$，$y\in E$和一切$t\geqslant 0$有

$$\inf_{p,q\in\{O_T(T^n x,0,\infty)\cup O_T(T^m y,0,\infty)\}}F_{p,q}(t)\geqslant\inf_{p,q\in\{O_T(x,0,\infty)\cup O_T(y,0,\infty)\}}F_{p,q}(\Phi(t)),$$

则T在E中存在唯一不动点x_*，而且对任一$x_0\in E$，序列$\{T^n x_0\}\mathscr{T}$-收敛于x_*。

定理3 设T是$(E,\mathscr{F},\Delta)$的$\mathscr{T}$-连续的自映象。设对任意的$x,y\in E$，$O_T(x,0,\infty)\cup O_T(y,0,\infty)$是概率有界的。再设存在$m,n\in Z^+$，使得对一切$x,y\in E$和一切的$t\geqslant 0$

(2.10) $$F_{T^m x,T^n y}(t)\geqslant\inf_{p,q\in\{O_T(x,0,\infty)\cup O_T(y,0,\infty)\}}F_{p,q}(\Phi(t)).$$

则T在E中存在唯一不动点，而且对任一$x_0\in E$，序列$\{T^n x_0\}\mathscr{T}$-收敛于x_*。

证 不妨设$m\geqslant n$。对任意的$\xi\in E$，令$x=T^i\xi$，$y=T^{m-n+j}\xi$，这里i,j是任意的非负整数。由(2.10)得

(2.11) $$\begin{aligned}F_{T^{m+i}\xi,T^{m+j}\xi}(t)&\geqslant\inf_{p,q\in\{O_T(T^i\xi,0,\infty)\cup O_T(T^{m-n+j}\xi,0,\infty)\}}F_{p,q}(\Phi(t))\\&\geqslant\inf_{p,q\in\{O_T(\xi,0,\infty)\}}F_{p,q}(\Phi(t))\qquad\forall\xi\in E,\ t\geqslant 0.\end{aligned}$$

于(2.11)左端让$i,j\geqslant 0$任意变动，并取下确界得

$$\inf_{p,q\in\{O_T(T^m\xi,0,\infty)\}}F_{p,q}(t)\geqslant\inf_{p,q\in\{O_T(\xi,0,\infty)\}}F_{p,q}(\Phi(t)),\ \forall\xi\in E,\ t\geqslant 0.$$

于是由推论2(1)得知对每一$x_0\in E$，序列$\{T^n x_0\}\mathscr{T}$-收敛于T之某一不动点x_*.仿照定理2一样可证$x_*\in E$是T在E中的唯一不动点。定理证毕。

注1 Sehgal,Bharucha-Reid[3]中的主要结果是定理3的特例。又定理3还包含引文[2,8]中的某些不动点定理为特例。

定理4. 设S，T是映$(E,\mathscr{F},\Delta)$到其自身的$\mathscr{T}$-连续映象。设$\Delta(t,t)\geqslant t,\forall t\in[0,1]$。再设对任意的$x\in E,O_S(x,0,\infty)\cup O_T(x,0,\infty)$是概率有界的。如存在函数$n,m$：$E\to Z^+$，使得对一切$x\in E$和一切$t\geqslant 0$有

$$(2.12)\quad \inf_{p\in O_S(S^{n(x)}x,0,\infty),q\in O_T(T^{m(x)}x,0,\infty)} F_{p,q}(t)\geqslant \inf_{p\in O_S(x,0,\infty),q\in O_T(x,0,\infty)} F_{p,q}(\Phi(t)).$$

则对任一$x_0\in E$，序列$\{S^nx_0\}$和$\{T^nx_0\}$都$\mathscr{T}$-收敛于S，T之一公共不动点$x_*\in E$。

证　任取$x_0\in E$，并取$h=\max\{m(x_0),\ n(x_0)\}$，由(2.12)得

$$\inf_{p\in O_S(S^hx_0,0,\infty),q\in O_T(T^hx_0,0,\infty)} F_{p,q}(t)\geqslant \inf_{p\in O_S(S^{n(x_0)}x_0,0,\infty),q\in O_T(T^{m(x_0)}x_0,0,\infty)} F_{p,q}(t)$$

$$\geqslant \inf_{p\in O_S(x_0,0,\infty),q\in O_T(x_0,0,\infty)} F_{p,q}(\Phi(t))\qquad \forall t\geqslant 0.$$

由上式，一般由归纳法可证，对任意n：$n=1,2\cdots$有

$$(2.13)\quad \inf_{p\in O_S(S^{nh}x_0,0,\infty),q\in O_T(T^{nh}x_0,0,\infty)} F_{p,q}(t)\geqslant$$

$$\geqslant \inf_{p\in O_S(S^{(n-1)h}x_0,0,\infty),q\in O_T(T^{(n-1)h}x_0,0,\infty)} F_{p,q}(\Phi(t))$$

$$\geqslant\cdots\geqslant \inf_{p\in O_S(x_0,0,\infty),q\in O_T(x_0,0,\infty)} F_{p,q}(\Phi^n(t))$$

$$\geqslant \sup_{s<\Phi^n(t)}\{\inf_{p\in O_S(x_0,0,\infty),q\in O_T(x_0,0,\infty)} F_{p,q}(s)\}.$$

于上式两端让$n\to\infty$取极限，并注意当$t>0$时$\Phi^n(t)\to\infty\ (n\to\infty)$，于是当$t>0$时可得

$$(2.14)\quad \lim_{n\to\infty}\inf_{p\in O_S(S^{nh}x_0,0,\infty),q\in O_T(T^{nh}x_0,0,\infty)} F_{p,q}(t)$$

$$\geqslant \lim_{n\to\infty}\sup_{s<\Phi^n(t)}\{\inf_{p\in O_S(x_0,0,\infty),q\in O_T(x_0,0,\infty)} F_{p,q}(s)\}$$

$$=\sup_{s>0}\{\inf_{p\in O_S(x_0,0,\infty),q\in O_T(x_0,0,\infty)} F_{p,q}(s)\}$$

$$\geqslant \sup_{s>0}\{\inf_{p,q\in[O_S(x_0,0,\infty)\cup O_T(x_0,0,\infty)]} F_{p,q}(s)\}=1.$$

(由假定集合$O_S(x_0,0,\infty)\cup O_T(x_0,0,\infty)$是概率有界的)。

现证$\{S^nx_0\}$是E中的$\mathscr{T}$-Cauchy列。事实上，对任给的$\varepsilon>0$和$\lambda\in(0,1)$，由(2.14)存在$N=N(\varepsilon,\lambda)$，当$n\geqslant N$时有

$$\inf_{p\in O_S(S^{nh}x_0,0,\infty),q\in O_T(T^{nh}x_0,0,\infty)} F_{p,q}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)>1-\lambda,$$

因而当$n\geqslant N$时，对一切$p\in O_s(S^{nh}x_0,0,\infty),q\in O_T(T^{nh}x_0,0,\infty)$有

$$(2.15)\quad F_{p,q}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)>1-\lambda.$$

于是当$n\geqslant N$时，对任意的$p_1,p_2\in O_s(S^{nh}x_0,0,\infty)$有

$$(2.16)\quad F_{p_1,p_2}(\varepsilon)\geqslant\Delta\left(F_{p_1,q}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),\ F_{q,p_2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)(\text{其中}q\in O_T(T^{nh}x_0,0,\infty))$$

$$\geqslant\Delta(1-\lambda),1-\lambda)\geqslant 1-\lambda.$$

由于$\varepsilon>0,\lambda\in(0,1)$的任意性，上式表明序列$\{S^nx_0\}$是$E$中的$\mathscr{T}$-Cauchy列。同理可证$\{T^nx_0\}$也是$E$中的$\mathscr{T}$-Cauchy列。由$E$的$\mathscr{T}$-完备性，设$S^nx_0\xrightarrow{\mathscr{T}}x_{1*}$；$T^nx_0\xrightarrow{\mathscr{T}}x_{2*}$。但由(2.14)知$x_{1*}=x_{2*}=x_*$。由于$S$，$T$的$\mathscr{T}$-连续性，即得$x_*$是$S$和$T$在$E$中的公共不动点。

推论7　设S，T是$(E,\mathscr{F},\Delta)$的$\mathscr{T}$-连续的自映象，设Δ满足条件$\Delta(t,t)\geqslant t,\forall t\in[0,1]$。再设对任意的$x,y\in E$，集合$O_S(x,0,\infty)\cup O_T(y,0,\infty)$是概率有界的。又设存在函数$n$，$m$：$E\to Z^+$，使得对一切$x,y\in E$和一切$t\geqslant 0$有

$$(2.17)\quad \inf_{p\in O_S(S^{n(x)}x,0,\infty),\,q\in O_T(T^{m(y)}y,0,\infty)} F_{p,q}(t)\geqslant \inf_{p\in O_S(x,0,\infty),\,q\in O_T(y,0,\infty)} F_{p,q}(\Phi(t)),$$

则S，T在E中存在唯一公共不动点$x_*\in E$，而且对每一$x_0\in E$，序列$\{S^nx_0\}$和$\{T^nx_0\}$都$\mathscr{T}$-收敛于x_*。

证 于(2.17)中取$y=x$即得(2.12)，故由定理4，对任一$x_0\in E$，序列$\{S^nx_0\}$和$\{T^nx_0\}$都$\mathscr{T}$-收敛于S，T之一公共不动点$x_*\in E$。仿定理2一样可证x_*是S,T的唯一公共不动点。

仿推论2一样可证下之结果成立。

推论8 设S，T是$(E,\mathscr{F},\Delta)$的$\mathscr{T}$-连续的自映象。设Δ满足条件$\Delta(t,t)\geqslant t$，$\forall t\in[0,1]$。再设对任意的$x,y\in E$，集合$O_S(x,0,\infty)\cup O_T(y,0,\infty)$是概率有界的。又设存在$m,n\in Z^+$，使得对一切的$x,y\in E$和一切的$t\geqslant 0$下之一条件成立：

(1) $\inf\limits_{p\in O_S(S^nx,0,\infty),\,q\in O_T(T^my,0,\infty)} F_{p,q}(t)\geqslant \inf\limits_{p\in O_S(x,0,\infty),\,q\in O_T(y,0,\infty)} F_{p,q}(\Phi(t))$；

(2) $F_{S^nx,T^my}(t)\geqslant \inf\limits_{p\in O_S(x,0,\infty),\,q\in O_T(y,0,\infty)} F_{p,q}(\Phi(t))$。

则S，T在E中存在唯一的公共不动点x_*，而且对任一$x_0\in E$，序列$\{S^nx_0\}$和$\{T^nx_0\}$都$\mathscr{T}$-收敛于x_*。

注2 Schweizer和Sklar在[4]中指出，Wald概率度量空间$(E,\mathscr{F})$是当$\Delta=$积(即$\Delta(a,b)\overset{\text{def}}{=}a\cdot b$，$\forall a,b\in[0,1]$)时的Menger空间，于是于定理1一定理3及其推论中取t-范数$\Delta=$积时，即得关于Wald空间中映象的不动点定理。这里不再赘述。

参考文献

[1] 游兆永，数学研究与评论，创刊号，25-28(1981)。
[2] 林熙，西安交通大学硕士学位论文，1981，
[3] Sehgal, V. M., Bharucha-Reid, *Math. Systems Theory*, V. 6, No2(1972), 97-102.
[4] Schweizer, B, Sklar, A., *Pacific J. Math.*, 10, (1960), 313-334.
[5] Sherwood, H., J. *London Math. Soc*. 44(1969), 441-448.
[6] Sherwood, H., Z., *Wahrscheintichkeitheorie Verw. Gebiete*, 6(1966), 62-64
[7] Menger. K., *Proc., Nat. Acad. Sci. USA*, 28 (1942), 535-537.
[8] Bocsan Gh., Proc. 5th. Conf. On Probability Theory(1974), 158-155
[9] Wald, A,, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 29(1943), 196-197.

Probabilistic Metric Spaces and Fixed Point Theorems for Mappings

Zhang Shi-sheng (Shih-sen Chang)

Abstract

Probabilistiic metric spaces were first studied by K. Menger[7] in 1942 and further developed by him and several authors. For detailed discussions of probabitistic metric spaces and their applications we refer to [1]-[9].

In the present paper, we continue the study of fixed point theorems of mappings on probabilistic metric spaees. In §2 of this paper we obtain several new fixed point theorems which generalize some well-known results in Sehgal, Bharucha-Reid[3] and Bocsan[8]. In addition, we also utilize theorems of the type considered in §2 to study fixed point theorems of mappings on Wald spaces.