第5卷 第3期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol.5 No.3
1985年7月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　July, 1985

在GCH之下Banach空间的拓扑同构*

关质钧

（哈尔滨船舶工程学院）

本文在广义连续统假设 $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$（简记为GCH）下，给出Banach空间的一个拓扑同构定理。

本世纪二十年代后期，Banach和Frèchet开始研究Frèchet空间和Banach空间的拓扑特征问题（见文献[1]）。Frèchet猜想：两个Banach空间是同胚的，充分必要它们有相同的稠密特性（见文献[2]）。直到1978年，H. Toruńczyk为这一较深的Frèchet猜想作了肯定的回答（见文献[2]、[3]）。

我们利用上述Frèchet猜想的肯定解，在GCH之下，给出本文的主要结果——定理1之1)。它说：有“相当多”的Banach空间，它们之间的拓扑同构仅取决于空间的基数或Hamel维数，不必加拓扑条件。这个结果又一次地说明GCH在建立数学理论中的重要意义（见文献[4]）。

引理1 设X是Banach空间，$\overline{\overline{X}} = \aleph_\alpha$，$D \subset X$是线性无关完全集，$\overline{\overline{D}} = \aleph_\beta$。则$\aleph_\alpha \leq \aleph_\beta^{\aleph_0}$。

证明 设A是span$D$中所有无穷可数子集的集系。因为D是线性无关集，则由文献[4]中P.284定理9，有$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{\text{sqan}D}}^{\aleph_0} = \aleph_\beta^{\aleph_0}$.

设B是Span$D$中所有由相异点组成的收敛序列的集。则$\overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{T(\aleph_0)}}\ \overline{\overline{A}} \leq 2^{\aleph_0}\ \aleph_\beta^{\aleph_0} = \aleph \cdot \aleph_\beta^{\aleph_0} = \aleph_\beta^{\aleph_0}$，其中$T(\aleph_0)$是基数$\aleph_0$的型集（见文献[5]中P.23），$\aleph$是连续统的势。

设$\dot{x} = \{(x_n) \in B : x_n \to x,\ x \in (\text{span}D)'\}$和$C\{\dot{x} : x \in (\text{span}D)'\}$，其中$(\text{span}D)'$是span$D$的导集。显然，集$(\text{span}D)'$和集$C$是对等的，于是，$\overline{\overline{(\text{span}D)'}} = \overline{\overline{C}} \leq \overline{\overline{B}}$.

由D的完全性可知，$X = \overline{\text{span}D} = \text{span}D \cup (\text{span}D)'$，因而$\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{\text{span}D}} + \overline{\overline{(\text{span}D)'}} \leq \aleph_\beta + \aleph_\beta^{\aleph_0} = \aleph_\beta^{\aleph_0}$。证毕。

引理2 CH（连续统假设$\aleph = \aleph_1$）蕴涵：

1）若α为非极限数，则

$$\aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_\alpha. \tag{1}$$

2）若α为极限数，且$cf(\alpha) = 0$，则$\aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_{\alpha+1}$。其中$cf(\alpha)$表示与$\alpha$共尾的$\omega_\xi$的下标序数$\xi$的极小元（见文献[4]）。

*1983年6月14日收到.

证明 1）用超穷归纳法。当 $\alpha=1$ 时，由 $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_0}=\aleph_{\alpha}^{\aleph_0}\aleph_{\alpha+1}$（见文献[4]中P.280）及CH，有 $\aleph_1^{\aleph_0}=\aleph_0^{\aleph_0}\aleph_1=\aleph\aleph_1=\aleph_1$。

$\forall$ 非极限数 $\alpha=\tau+1$，设（1）式对所有的 $\beta<\alpha$ 成立。则 $\aleph_{\alpha}^{\aleph_0}=\aleph_{\tau+1}^{\aleph_0}=\aleph_{\tau}^{\aleph_0}\aleph_{\tau+1}=\aleph_{\tau}\cdot\aleph_{\alpha}=\aleph_{\alpha}$，即（1）式对 α 成立。

2）因为 $cf(\alpha)=0$，所以 $\lim\limits_{n<w_0}\varphi(n)=\alpha$，其中 $\varphi(n)$ 是递增 w_0——序列（见文献[4]中P.231），于是 $\sum\limits_{n<w_0}\aleph_{\varphi(n)}=\aleph_{\alpha}$，从而 $\aleph_{\alpha}<\aleph_{\alpha}^{\aleph_0}$（见文献[6]）。另一方面，由1)有 $\aleph_{\alpha}^{\aleph_0}\leqslant\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_0}=\aleph_{\alpha+1}$，于是 $\aleph_{\alpha}^{\aleph_0}=\aleph_{\alpha+1}$。证毕。

注1 作为文献[4]中P. 289 定理17的特款，有——GCH蕴涵：如果 α 是极限数，且 $cf(\alpha)>0$，则 $\aleph_{\alpha}^{\aleph_0}=\aleph_{\alpha}$。

引理3 CH 蕴涵：设 X 是无穷维 Banach 空间。则 $\overline{\overline{X}}=\dim X\geqslant\aleph$。

证明 首先证明：若 X_0 是一个有无穷可数 Schauder 基 (x_n) 的Banach 空间，则 $\dim X_0\geqslant\aleph$。

因为 (x_n) 是线性无关集，所以 $x_n\neq0$，$n\in N$。设 $y_n=\dfrac{x_n}{\|x_n\|}$，则 $\|y_n\|=1$，且 (y_n) 是 X_0 的一个 Schauder 基。因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 绝对收敛，所以 X_0 中的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}y_n$ 绝对收敛，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}y_n$ 收敛。记 $y=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}y_n$。

引用命题（见文献[7]）：设 A 是所有满足如下条件的自然数数列的集系：对于任意的 a，$b\in A$，$a\neq b$，有 $a\cap b$ 为有限集（包括空集）。则 $\overline{\overline{A}}=\aleph$。设 $y_a=\sum\limits_{n\in a}\dfrac{1}{n^2}y_n$，$a\in A$。如下证 $\{y_a\}_{a\in A}$ 是 X_0 中的线性无关集。设 $y_{a_1},\cdots,y_{a_m}$ 是 $\{y_a\}_{a\in A}$ 中任意有限个元素，且

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i y_{a_i}=0. \tag{2}$$

因为 a_1 中有无穷多个自然数不属于 $\bigcup\limits_{i=2}^{m}a_i$，所以可取 $n\in a_1-\bigcup\limits_{i=2}^{m}a_i$。于是由(2)式及用Schauder基表示空间元素时系数的唯一性，得 $\alpha_1\dfrac{1}{n^2}=0$，所以 $\alpha_1=0$。同理可证 $\alpha_2=\alpha_3=\cdots\cdots=\alpha_m=0$。这就证明了 $\dim X_0\geqslant\aleph$。

现在证明：$\overline{\overline{X}}=\dim X\geqslant\aleph$。若存在 Banach 空间 X_*，使 $\aleph_0\leqslant\dim X_*<\aleph$。则由 CH，必有 $\dim X_*=\aleph$。设 (z_n) 是 X_* 的一个 Hamel 基。则 (z_n) 也是 X_* 的一个 Schauder 基，于是 $\dim X_*\geqslant\aleph$，矛盾。这样 $\dim X\geqslant\aleph$ 得证。由前式及 $\overline{\overline{X}}=\aleph\cdot\dim X$（见文献[8]、[9]），有 $\overline{\overline{X}}=\dim X$。证毕。

为了方便论述计，我们采用集论中“属于”的记号 $\in$：把序数分为四类，分别记非极限数 α、极限数 $\alpha(cf(\alpha)>0)$、极限数 $\alpha(cf(\alpha)=0)$ 和 $\alpha=0$ 为 $\alpha\in$ Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ。

引理4（Banach 空间的维数定理）。GCH 蕴涵：设 X 是 Banach 空间，$\dim X=\aleph_{\alpha}$，$D\subset X$ 是线性无关完全集，$\overline{\overline{D}}=\aleph_{\beta}$。则

1）若 $\alpha\in I$，则 i）$\beta\in I\Rightarrow\alpha=\beta$；ii）$\beta\in$ Ⅲ $\Rightarrow\alpha=\beta+1$；iii）$\beta\in$ Ⅳ $\Rightarrow\alpha=1$；Ⅳ）$\beta\in$ Ⅱ。若 $\beta\in I$，则 $\alpha=\beta$。

2）$\alpha\in$ Ⅱ $\Leftrightarrow\beta\in$ Ⅱ。且当 $\alpha\in$ Ⅱ时，$\alpha=\beta$。

3）若 $\alpha\in$ Ⅲ，则 $\alpha=\beta$。

证明　由 $\dim X=\aleph_\alpha$ 及引理 3 我们有 $\dim X=\bar{\bar{X}}$。

1）设 $\alpha\in I$。i）若$\beta\in I$，则由引理 1、引理 2，有

$$\aleph_\beta\leqslant\aleph_\alpha\leqslant\aleph_\beta^{\aleph_0}=\aleph_\beta. \tag{3}$$

于是$\aleph_\alpha=\aleph_\beta$，从而$\alpha=\beta$。ii）若$\beta\in$ Ⅲ，则由引理 1、引理 2，有

$$\aleph_\beta\leqslant\aleph_\alpha\leqslant\aleph_\beta^{\aleph_0}=\aleph_{\beta+1}. \tag{4}$$

因为 $\alpha\neq\beta$，所以$\aleph_\alpha=\aleph_{\beta+1}$，于是 $\alpha=\beta+1$。iii）若 $\beta=0$，易证X是可分的。由$\dim X\geqslant\aleph$（引理 3）、CH 及可分度量空间的基数$\leqslant\aleph$，可知 $\alpha=1$。Ⅳ）若 $\beta\in$ Ⅱ，则由注 1 知(3)式成立，所以 $\alpha=\beta$，此为矛盾。设 $\beta\in I$，则（3）式成立，所以$\alpha=\beta$。

2）设 $\alpha\in$ Ⅱ。i）若 $\beta\in$ Ⅱ，则（3）式成立，所以 $\alpha=\beta$。ii）若 $\beta\in I$，则（3）式成立，所以$\alpha=\beta$，，此为矛盾。iii）若 $\beta\in$ Ⅲ，则（4）式成立，但$\alpha\neq\beta$、$\beta+1$，此为矛盾。iv）若 $\beta\in$ Ⅳ，则$\alpha=1$，此为矛盾，故当 $\alpha\in$ Ⅱ时，$\alpha=\beta$。设$\beta\in$ Ⅱ，则（3）式成立，所以$\alpha=\beta$。

3）设$\alpha\in$ Ⅲ。i）若 $\beta\in$ Ⅲ，则（4）式成立，但$\alpha\neq\beta+1$，所以 $\alpha=\beta$。ii）若 $\beta\in I$、Ⅱ，则（3）式成立，所以$\alpha=\beta$。此为矛盾。iii）若$\beta\in$ Ⅳ，则$\alpha=1$，此为矛盾。故若$\alpha\in$ Ⅲ，则$\alpha=\beta$。证毕。

Banach 空间X的各完全集的最小基数称为X的稠密特性，记为dcx。显然，若完全子集 $D\subset X$ 的基数为 dcx，则不妨可以要求D为线性无关集。

定理1（Banach 空间的拓扑同构定理）。GCH 蕴涵：设 X_1、X_2 是 Banach 空间，$\dim X_1=\aleph_{\alpha_1}$、$\dim X_2=\aleph_{\alpha_2}$，$\mathrm{dc}x_1=\aleph_{\beta_1}$、$\mathrm{dc}x_2=\aleph_{\beta_2}$。则

1）若 $\alpha_1=\alpha_2$ 为极限数，则 X_1 与 X_2 拓扑同构，且 $\alpha_1=\beta_1$。

2）若 $\alpha_1=\alpha_2$ 为非极限数，则当 β_1 与 β_2为同类序数（I、Ⅲ、Ⅳ）时，X_1与X_2拓扑同构。

证明　由引理 4 之 2）和 3）及文献[2]和[3]中的Fréchet 猜想的肯定解，得定理 1 之 1)。由引理 4 之 1）及 Frèchet 猜想的肯定解得定理 1 之 2）。证毕。

注2　由于任何极限数集，都有大于该集中任一序数的极限数，所以满足定理 1 之1)的条件的 Banach 空间是“相当多”的。

参　考　文　献

[1] Toruńczyk, H., Characterizing Hillbert Space topology, Fund. Math. III, no. 3(1981), PP. 247-262. *MR. Amer. Math. Soc.*, 82i:57016.

[2] 张世勋，泛函研究之一些新方向和张世勋定理及张世勋不等式之进展，在全国泛函分析(空间及应用组)学术年会牡丹江会议上的报告(1981)。

[3] Toruńczyk, H., Characterization of infinite-dimensional manifolds. Proceedings of the International Conference on Geometric Topology (Warsaw, 1978), PP. 431-437, PWN, Warsaw, 1980. *MR. Amer. Math. Soc.*, 83f:57011.

[4] Kuratowski, K., Mostowski, A., Set Theory with an Introduction to Descriptive Set Theory, *PWN*. (1976), PP. 224-296.

[5] 谢拜杰，超穷数与超穷论法，吉林人民出版社(1979), PP. 23、50、107-128.

[6] 豪斯道夫，F.，集论，科学出版社(1960), PP. 28-29.

[7] Halmos, P. R., A Hilbert Space Problem Book, New York, Tornto London Melbourne (1967), PP. 170-171.

[8] Löwig, H., Uber die Oimension Lineorer Römme, *Studia Malh*. 5(1934), 18-23.

[9] Jaeobsom, N., Lectures in Abatract Algebra, Vol. Ⅱ, Linear Algebra, Springer-Verlag, New York (1975).

Topological Isomorphism

of Banach Spaces under GCH

Guan Zhijun

Abstract

The paper gives a topologicaly isomorphic theorem of Banach spaces under the generilized continuum hypothesis or GCH. The first part of theorem 1 is the main result which states GCH implies that if the Banach spaces have the same cardinal number $\aleph_\alpha$ (α is a limit ordinal), then they are topological isomorphic.