第5卷 第3期
1985年7月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.3
July, 1985

高维空间中具重特征的方程的一类新的定解问题*

陆柱家

(中国科学院数学研究所)

1. 引言 [1]中研究了具重特征的方程

$$Lu=\sum_{i=1}^{n}u_{x_ix_i}-\left(\sum_{j=1}^{m}x_j^2\right)u_{tt}+\sum_{i=1}^{n}a_iu_{x_i}+bu_t+cu=0 \qquad (t\geqslant 0) \tag{1}$$

的以超平面 $t=0$ 为始值支柱的Cauchy问题，得到了下面一些有意义的结果：(i) $1\leq m<n$ 时，对任意系数 $a_i,b,c\in\mathbf{R}$，问题都没有唯一性；(ii)当 $1\leq m=n$ 时，问题没有唯一性，当且仅当

$$b=n+2k\ \ (k=0,1,2,\cdots),\ \ 且 c=\sum_{i=1}^{n}a_i^2/4.$$

这样的现象即唯一性课题中所谓的"离散"现象。由此看出，算子L的次低阶项系数c亦起着重要作用。[1)]

[2]中，对于两个变量的具重特征的方程

$$P_bu\equiv u_{xx}-x^2u_{tt}+bu_t=0,$$

给出了使其解为适定的一类定解问题。对于那些使 P_b 的Cauchy问题和Goursat问题的解不唯一的那些离散的 b 值 $(b=2k+1,k=0,1,2,\cdots)$，这是通过在重特征点集 $x=0$ 上添加适当的数据而得到的。

本文仅对使得当 $m=n$ 时的方程(1)的Cauchy问题和Goursat问题的解不唯一的那些 b 值，给出一类新的适定的定解问题。得到的结果表明，与[2]一样，必须在重特征点组成的流形 $\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0$ 上添加相当多（随 n 及 b 的增加而增加）适当的数据，才能使问题变为适定的。

因为显然只需作一个函数变换即能消去诸 a_i 和 c，因此我们不妨考虑下述方程：

$$L_bu=\sum_{i=1}^{n}u_{x_ix_i}-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)u_{tt}+bu_t=0, \tag{2}$$

---

*1981年9月29日收到。

1) 容易知道，这些结果对于本文所讨论L的Goursat问题仍然成立。

其中$b\in\mathbf{R}$。我们引入下述记号：

$$X_i=\partial_{x_i}+x_i\partial_t,\quad Y_i=\partial_{x_i}-x_i\partial_t,$$

$$X^\alpha=X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n},\quad Y^\alpha=Y_1^{\alpha_1}\cdots Y_n^{\alpha_n},$$

其中$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$\alpha_i\in\mathbf{Z}+$（非负整数集合）；$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$；

$$S_0=\{f\in C^\infty(\mathbf{R}^1)\,|\,f(0)=0\}.$$

有下面一些明显的关系式

$$X_iX_j=X_jX_i,\quad Y_iY_j=Y_jY_i, \tag{*}$$

$$X_iY_j=Y_jX_i-2\delta_{ij}\partial_t\ (i,j=1,2,\cdots,n). \tag{**}$$

显然，(2)可写为

$$L_bu=\sum_{i=1}^n Y_iX_iu+(b-n)\partial_tu=0, \tag{2'}$$

并且有

$$X_iL_b=L_{b-2}X_i\ (i=1,2,\cdots,n). \tag{3}$$

2．结果　我们的结果是下面两个定理。为了使问题的讨论简明起见，只在C^∞空间中讨论问题（对于C^m空间中的问题，可一样地讨论）。

定理1　对于任何$k\in\mathbf{Z}+$，定解问题

$$\left.\begin{aligned}&L_{n+2k}u=0\quad\text{在}\ \Omega\ \text{中},\\&u|_{\partial\Omega}=0,\\&(X^\alpha u)(0,\cdots,0,t)=0,t\geqslant0,\forall\alpha:\ |\alpha|=k\end{aligned}\right\} \tag{4$_k$}$$

在$C^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$中只有平凡解，其中

$$\Omega=\{(x_1,\cdots,x_n,t)\in\mathbf{R}^{n+1}\,|\,t>\sum_{i=1}^n x_i^2/2\},$$

$$\partial\Omega=\{(x_1,\cdots,x_n,t)\in\mathbf{R}^{n+1}\,|\,t=\sum_{i=1}^n x_i^2/2\}.$$

定理2．对于任何$k\in\mathbf{Z}_+$，定解问题

$$\left.\begin{aligned}&L_{n+2k}u=0\quad\text{在}\ \Omega\ \text{中},\\&u|_{\partial\Omega}=0。\\&(X^\alpha u)(0,\cdots,0,t)=f_\alpha(t),t\geqslant o,\forall\alpha:\ |\alpha|=k\end{aligned}\right\} \tag{5$_k$}$$

有$C^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$解$u_k$，当且仅当

$$f_\alpha\in S_o(\mathbf{R}^1),\quad\forall\alpha:|\alpha|=k. \tag{6$_k$}$$

并且，当$(6)_k$被满足时，$(5)_k$的C^∞解u_k由下式表出

$$u_k(x_1,\cdots,x_n,t)=(-1)^k\frac{1}{2^k}\sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}Y^\alpha\int_0^{t-\sum_{i=1}^n x_i^2/2}dt_{k-1}\int_0^{t_{k-1}}dt_{k-2}\cdots\int_0^{t_1}f_\alpha(t_o)dt_o. \tag{7$_k$}$$

其中，$k=0$时约定

$$\int_0^{t-\sum_{i=1}^n x_i^2/2} dt_{k-1}\int_0^{t_{k-1}} dt_{k-2}\cdots\int_0^{t_1} f_\alpha(t_0)dt_0 \equiv f_\alpha(t-\sum_{i=1}^n x_i^2/2).$$

3．**几个引理** 在证明定理1，2之前，先证明几个引理。

引理1 设$u\in C^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$。则在$\mathbf{R}^{n+1}$中$X_iu=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，当且仅当$u(x_1,\cdots,x_n,t)=g(t-\sum_{i=1}^n x_i^2/2)$，其中$g\in C^\infty(\mathbf{R}^1)$。

证明 $X_1u=0$即$(\partial_{x_1}+x_1\partial_t)u=0$；若$u\in C^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$，则

$$u(x_1,\cdots,x_n,t)=g_1(t-\frac{x_1^2}{2},x_2,\cdots,x_n),$$

其中$g_1\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$。

但$X_2u=0$，所以得到(记$\zeta_1=t-\frac{x_1^2}{2}$)

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_2}+x_2\frac{\partial g_1}{\partial \zeta_1}=0.$$

解此一阶偏微分方程，得到

$$g_1(t-\frac{x_1^2}{2},x_2,\cdots,x_n)=g_2(t-\frac{x_1^2+x_2^2}{2},x_3,\cdots,x_n),$$

其中$g_2\in C^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$。如此进行下去，即可得

$$u(x_1,\cdots,x_n,t)=g(t-\sum_{i=1}^n x_i^2/2).$$

其中$g\in C^\infty(\mathbf{R}^1)$。

反之，若$u=g(t-\sum_{i=1}^n x_i^2/2)$ $(g\in C^\infty(\mathbf{R}^1))$，则显然有

$$X_iu=0,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

证毕。

引理2 设$k\in\mathbf{Z}_+$，并设$g_k\in C^k(\mathbf{R}^1)$满足下述条件：

当$k>0$时$g_k^{(l)}(0)=0$， $l=0,1,\cdots,k-1$，

则对任何$h\in C^k(\mathbf{R}^n)$，有

$$\int_{\sum_{i=1}^n x_i^2/2}^t \sum_{|\alpha|=k} Y^\alpha[h(x_1,\cdots,x_n)g_k(\tau-\sum_{i=1}^n x_i^2/2)]d\tau$$
$$=\sum_{|\alpha|=k} Y^\alpha[h(x_1,\cdots,x_n)\int_0^{t-\sum_{i=1}^n x_i^2/2} g_k(\tau)d\tau], \tag{8$_k$}$$

其中，左端的Y^α为关于τ和$x_1,\cdots,x_n$的微分算子。

证明 只需证明不带求和号$\sum_{|\alpha|=k}$的$(8)_k$即可。

显然，当$k=0$时$(8)_k$为恒等式。现设对任意α: $|\alpha|=k$，不带求和号的$(8)_k$成立。任取β: $|\beta|=k+1$。则必有α: $|\alpha|=k$及j: $1\le j\le n$，使$Y^\beta=Y^\alpha Y_j$。因此

$$\int_{\sum_{i=1}^n x_i^2/2}^t Y^\beta[h(x_1,\cdots,x_n)g_{k+1}(\tau-\sum_{i=1}^n x_i^2/2)]d\tau$$

$$=\int_{\sum_{i=1}^n x_i^2/2}^t Y^\alpha[Y_j(h(x_1,\cdots,x_n)g_{k+1}(\tau-\sum_{i=1}^n x_i^2/2))]d\tau$$

$$=\int_{\sum_{i=1}^n x_i^2/2}^t Y^\alpha\left[h_j'g_{k+1}\left(\tau-\sum_{i=1}^n x_i^2/2\right)-2x_jhg_{k+1}'\left(\tau-\sum_{i=1}^n x_i^2/2\right)\right]d\tau \qquad \left(h_j'=\frac{\partial h}{\partial x_j}\right)$$

$$=Y^\alpha\left[h_j'\int_0^{t-\sum_{i=1}^n x_i^2/2} g_{k+1}(\tau)d\tau-2x_jh\int_0^{t-\sum_{i=1}^n x_i^2/2} g_{k+1}'(\tau)d\tau\right] \qquad \text{(归纳假设)}$$

$$=Y^\alpha\left[h_j'\int_0^{t-\sum_{i=1}^n x_i^2/2} g_{k+1}(\tau)d\tau-2x_jhg_{k+1}(t-\sum_{i=1}^n x_i^2/2)\right] \qquad (g_{k+1}(0)=0)$$

$$=Y^\alpha\left[Y_j(h\int_0^{t-\sum_{i=1}^n x_i^2/2} g_{k+1}(\tau)d\tau)\right]$$

$$=Y^\beta\left[h(x_1,\cdots,x_n)\int_0^{t-\sum_{i=1}^n x_i^2/2} g_{k+1}(\tau)d\tau\right].$$

证毕。

引理3　对任何$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$，有

$$X^\alpha Y^\beta=\sum_{p_1=0}^{\gamma_1}\cdots\sum_{p_n=0}^{\gamma_n}(-2)^{|p|}\binom{\alpha}{p}\binom{\beta}{p}p!\,\partial_t^{|p|}Y^{\beta-P}X^{\alpha-P}, \tag{9}$$

其中$\gamma_j=\min(\alpha_j,\beta_j)$，$j=1,2,\cdots,n$，$P=(P_1,\cdots,P_n)$，$\binom{\alpha}{p}=\frac{\alpha!}{P!(\alpha-P)!}$，$\alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!$。

证明　由于(*)及(**)，所以只需考虑每一个$X_j^{\alpha_j}Y_j^{\beta_j}$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 即可。然而对于$X^{\alpha_j}Y^{\beta_j}$，利用$i=j$时的(**)及$X_j\partial_t=\partial_tX_j$，$Y_j\partial_t=\partial_tY_j$，再利用归纳法，容易证明

$$X_j^{\alpha_j}Y_j^{\beta_j}=\sum_{P_j=0}^{\gamma_j}(-2)^{P_j}\binom{\alpha_j}{p_j}\binom{\beta_j}{p_j}P_j!\,\partial_t^{P_j}Y^{\beta_j-P_j}X_j^{\alpha_j-P_j},$$

其中$\gamma_j=\min(\alpha_j,\ \beta_j)$。　　证毕

4．定理1，2的证明　现在来证明本文的结果．

定理1的证明．由$u|_{\partial\Omega}=0$，得$X_iu|_{\partial\Omega}=0$，$i=1,2,\cdots,n$．

(i)设u为$(4)_0$的C^∞解．由(3)，$X_iL_nu=L_{n-2}X_iu$ $(i=1,2,\cdots,n)$，以及$L_nu=0$，我们得到

$$\begin{cases}L_{n-2}(X_iu)=0 & \text{在}\ \Omega\ \text{中},\\ (X_iu)|_{\partial\Omega}=0,\end{cases} \qquad i=1,2,\cdots,n.$$

由[1]，[2]，$b<n$时Goursat问题的解是唯一的[2)]，所以得到

$$X_iu=0 \quad \text{在}\ R^{n+1}\ \text{中}, \qquad i=1,2,\cdots,n.$$

由引理1及$u|_{\partial\Omega}=0$得到

2）用与[2]中类似的方法，可得此结论．

$$u(x_1,\cdots,x_n,t)=g(t-\sum_{i=1}^{n}x_i^2/2),\quad g\in S_0.$$

然而$u(0,\cdots,0,t)=0$，因此$g(t)=0$。这就证明了$(4)_0$的C^∞解是平凡的。

(ii)现在假设$(4)_k$ $(k\geqslant 0)$的C^∞解必为平凡解。我们来证明$(4)_{k+1}$的C^∞解u_{k+1}亦然。这样，由归纳法知定理1得证。

由$X_iL_{n+2(k+1)}=L_{n+2k}X_i$及$L_{n+2(k+1)}u_{k+1}=0$，对每个$i=1,2,\cdots,n$，得到

$$\left.\begin{aligned}&L_{n+2k}(X_iu_{k+1})=0 \quad 在\Omega中,\\&(X_iu_{k+1})|_{\partial\Omega}=0,\\&(X^\beta(X_iu_{k+1}))(0,\cdots,0,t)=0,\ t\geqslant 0,\forall\beta:|\beta|=k.\end{aligned}\right\}\qquad (10)_i$$

$(10)_i$即关于X_iu_{k+1}的$(4)_k$。由归纳假设，$X_iu_{k+1}\equiv 0(i=1,2,\cdots,n)$。与(i)一样，得到$u_{k+1}(x_1,\cdots,x_n,t)\equiv 0$。证毕。

定理2的证明。显然，若$(5)_k$有解$u\in C^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$，则$(6)_k$必须被满足。

反之，当$(6)_k$被满足时，我们来验证用$(7)_k$表示的函数u_k即为$(5)_k$的$C^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$解。

首先，因为$(7)_k$的形式为

$$u_k(x_1,\cdots,x_n,t)=\sum_{|\alpha|=k}Y^\alpha g_\alpha(t-\sum_{i=1}^{n}x_i^2/2),$$

由[1]，即知它满足方程

$$L_{n+2k}u_k=0\quad 在\Omega中。$$

其次，由引理2知（在其中取$h(x_1,\cdots,x_n)\equiv 1$）$u_k|_{\partial\Omega}=0$。

最后，对于$\beta:|\beta|=k$，考察$X^\beta u_k$。分别考虑$X^\beta Y^\alpha g(t-\sum_{i=1}^{n}x_i^2/2)$，其中$|\alpha|=k$。若$\alpha\neq\beta$，则必存在$j$，使$\beta_j>\alpha_j$。这样，由引理3及

$$X_mg(t-\sum_{i=1}^{n}x_i^2/2)=0,\qquad m=1,2,\cdots,n \tag{11}$$

知$X^\beta Y^\alpha g(t-\sum_{i=1}^{n}x_i^2/2)=0$。现令$\alpha=\beta$。则从引理3及(11)知，(9)中$p\neq\beta$的项作用到$g(t-\sum_{i=1}^{n}x_i^2/2)$上皆为0，而$p=\beta$这一项为$(-2)^{|\beta|}\frac{1}{\beta!}\partial_t^{|\beta|}$。所以容易看到$X^\beta u_k(x_1,\cdots,x_n,t)=f_\beta(t-\sum_{i=1}^{n}x_i^2/2)(\forall|\beta|=k)$。当然更有$(X^\beta u_k)(0,\cdots,0,t)=f_\beta(t)$，即$u_k$满足$(5)_k$中最后一个条件。 证毕。

从定理2中$(5)_k$的解的表达式$(7)_k$可明显看出解对于数据$f_\alpha(|\alpha|=k)$的依赖性。因此从定理1，2知道，对于$b=n+2k$，$k=0,1,2,\cdots$，问题$(5)_k$是一类适定的定解问题。

参考文献

[1] 王光寅、麦明微、陆柱家，关于始值问题的离散现象，科学通报，23(1978)，5，279-282.

[2] Lu Zhujia, Mai Mingcheng, Wang Guangyin, Discrete phenomena in existence in the initial value problems, *SCIENTIA SINICA*, XXII(1979), 11, 1229-1237.