第5卷 第3期
1985年7月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.3
July, 1985

用 Walsh-Fourier 级数的(c,β)平均来逼近函数的问题*

徐前方

（杭州大学）

设$p\geqslant 2$是固定的整数. $x\in[0,1]$的p进表示是$x=(0.x_1x_2\cdots x_n\cdots)$，其中$x_k\in\{0,1,\cdots,p-1\}$，$k\in \mathrm{N}=\{1,2,\cdots\}$. 並且约定对$p$进有理点取有限表示. 对任意非负整数$k\geqslant 0$，写$k=\sum\limits_{j=0}^{n}k_jp^j$，$k_j\in\{0,1,\cdots,p-1\}$. 设$\omega=\exp\left(\frac{2\pi i}{p}\right)$，则$p$进的 Walsh函数[1]定义为

$$W_k(x)=\omega^{\sum\limits_{j=0}^{n}x_{j+1}k_j}.$$

周期为1的L可积函数$f(x)$的p进 Walsh-Fourier 级数简记为W_pFS. 用$\sigma_k^{(\beta)}(f;x)$表示$f(x)$的W_pFS的(c,β) $(\beta>0)$平均. 本文讨论用$\sigma_k^{(\beta)}(f;x)$去逼近$L^q(0,1)$ $(1\leqslant q\leqslant\infty)$中函数的问题. 得到的主要结果是

定理 设$f(x)\in L^q(0,1)$，$1\leqslant q\leqslant\infty$，$\omega^{(q)}(f;\delta)$是$f(x)$在$L^q(0,1)$中的$W$连续模(即$\omega^{(q)}(f;\delta)=\sup\limits_{0<h<\delta}\left\{\left[\int_0^1|f(x\oplus h-f(x)|^qdx\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$，则对任意的$\beta>0$，$f(x)$的$W_pFS$的$(c,\beta)$平均$\sigma_k^{(\beta)}(f;x)$满足

$$\|\sigma_k^{(\beta)}(f;x)-f(x)\|_{L^q}\leqslant C\left(\frac{1}{p^n}\right)\sum_{j=0}^{n}p^j\omega^{(q)}\left(f;\frac{1}{p^j}\right),\tag{1}$$

其中非负整数n由关系$p^n<k\leqslant p^{n+1}$确定，C是与k和f无关的常数.

记 $I_{n,k}=I_{n,k}(p)=\left(\frac{k}{p^n},\frac{k+1}{p^n}\right)$，$0\leqslant k\leqslant p^n-1$，$n\in p\{0,1,\cdots\}$. 用

$$D_k(t)=\sum_{r=0}^{k-1}\overline{W_j(t)};\qquad K_k(t)=\frac{1}{k}\sum_{r=1}^{k}D_r(t);\qquad k\in N$$

$$K_k^{(\beta)}(t)=\sum_{r=1}^{k}\frac{A_{k-r}^{(\beta-1)}D_r(t)}{A_{k-1}^{(\beta)}}=\sum_{r=0}^{k-1}\frac{A_{k-r-1}^{(\beta)}\overline{W_r(t)}}{A_{k-1}^{(\beta)}},\text{ 其中 }A_k^{(\beta)}=\frac{\Gamma(\beta+k+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(k+1)}\ (\beta>0);$$

分别表示 Walsh 函数的 Dirichlet 核，Fejér 核以及(c,β)核. 我们有

引理1

$$D_{p^n}(t)=\begin{cases}p^n, & t\in I_{n,0}\\ 0, & t\in\{(0,1)-I_{n,0}\}\end{cases}\tag{2}$$

$$\int_0^1|K_k(t)|dt<C\qquad k\in N\tag{3}$$

*1982年2月11日收到.

其中 C 是绝对常数．以下文中常数 C 在不同式中可取不同值．

这个引理是已知的[2]．由此知 $\overline{D_{p^n}(t)}=D_{p^n}(t)$，

$$\int_0^1 |\overline{K_k(t)}|\,dt<C. \tag{3$'$}$$

引理2　对任意 $\beta>0$，有

$$\int_0^1 |K_k^{(\beta)}(t)|\,dt<C. \qquad k\in N. \tag{4}$$

证明　令 $k=\sum_{r=1}^m a_r p^{n_r}$，$n_1>n_2>\cdots>n_m\geqslant 0$，$0<a_r<p$．记 $k^{(r-1)}=k^{(r)}+a_r p^{n_r}$，$k^{(0)}=k$．利用Walsh函数的性质，有

$$\begin{aligned}A_{k-1}^{(\beta)}K_k^{(\beta)}(t)&=\sum_{r=0}^{k-1}A_{k-r-1}^{(\beta)}\overline{W_r(t)}=\sum_{v=1}^m\sum_{r=0}^{a_vp^{n_v}-1}A^{(\beta)}_{k^{(v-1)}-r-1}\overline{W_{k-k^{(v-1)}+1}(t)}\\&=\sum_{v=1}^m\overline{W_{k-k^{(v-1)}}(t)}\sum_{r=0}^{a_vp^{n_v}-1}A^{(\beta)}_{k^{(v-1)}-a_vp^{n_v}+r}\overline{W_{a_vp^{n_v}-r-1}(t)},\end{aligned}$$

注意到当 $0\leqslant r<a_vp^{n_v}$ 时，有

$$\overline{W_{a_vp^{n_v}-r-1}(t)}=\overline{W_{a_vp^{n_v}-1}(t)}W_r(t), \tag{5}$$

于是

$$A_{k-1}^{(\beta)}K_k^{(\beta)}(t)=\sum_{i=1}^m\overline{W_{k-k^{(v)}-1}(t)}\sum_{r=1}^{a_vp^{n_v}-1}A^{(\beta)}_{k^{(v)}+r}W_r(t)$$

对上式作Abel变换两次，並用等式 $A_{n+1}^{(\beta)}-A_n^{(\beta)}=A_{n+1}^{(\beta-1)}$，得到

$$\begin{aligned}A_{k-1}^{(\beta)}K_k^{(\beta)}(t)=\sum_{v=1}^m\overline{W_{k-k^{(v)}-1}(t)}\Big[&\sum_{r=1}^{a_vp^{n_v}-2}r\overline{K_r(t)}A^{(\beta-2)}_{k^{(v)}+r+1}\\&-(a_vp^{n_v}-1)\overline{K_{a_vp^{n_v}-1}(t)}A^{(\beta-1)}_{k^{(v-1)}-1}+A^{(\beta)}_{k^{(v-1)}-1}\overline{D_{a_vp^{n_v}}(t)}\Big].\end{aligned} \tag{6}$$

容易验算

$$\begin{aligned}D_{ap^v+r}(t)&=D_{p^v}(t)[1+\overline{W_{p^v}(t)}+\overline{W_{2p^v}(t)}+\cdots+\overline{W_{(a-1)p^v}(t)}]\\&+\overline{W_{ap^v}(t)}D_r(t)=D_{p^v}(t)R_v(t)+\overline{W_{ap^v}(t)}D_r(t),\end{aligned} \tag{7}$$

其中　$R_v(t)=1+\overline{W_{p^v}(t)}+\cdots+\overline{W_{(a-1)p^v}(t)}$ 满足

$$|R_v(t)|\leqslant a<p \tag{8}$$

由[5]知

$$|A_k^{(\beta)}|\leqslant Ck^\beta. \tag{9}$$

于是用引理1，(8)，(9)到(6)得

$$\begin{aligned}\int_0^1|A_{k-1}^{(\beta)}K_k^{(\beta)}(t)|\,dt\leqslant C\sum_{v=1}^m\Big[&\sum_{r=1}^{a_vp^{n_v}-2}\frac{r}{(k^{(v)}+r+1)^{2-\beta}}\\&+(a_vp^{n_v}-1)\frac{1}{(k^{(v-1)}-1)^{1-\beta}}+(k^{(v-1)}-1)^\beta\Big]<Ck^\beta,\end{aligned}$$

由此就可得到(4)式．引理2证毕．

引理3　设 $\beta>0$，$k=ap^n+k'$，$0<a<p$，$1\leqslant k'\leqslant p^n$，$0\leqslant j\leqslant n-1$，则

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{r=1}^{a(p-1)p^j-1} r\left|A^{(\beta-2)}_{k-ap^j+r+1}\right| \leqslant Cp^{2j+n(\beta-2)},\\ &\sum_{r=0}^{a(p-1)p^j-1} A^{(\beta-1)}_{k-ap^j-r}\leqslant Cp^{j+n(\beta-1)},\\ &A^{(\beta-1)}_{k-ap^j}\leqslant Cp^{n(\beta-1)},\end{aligned}\right\}\ n\in N \tag{10}$$

其中C是与k无关的常数。

证明　证明方法可看[3]，只须注意到 $p^n\leqslant k<p^{n+1}$ 以及 $0\leqslant j\leqslant n-2$ 时，$k-ap^{j+1}\geqslant a(p-1)p^{n-1}$就行。

下面导出所需要的 $K_k^{(\beta)}(t)$ 的适当的表示式。写 $k=ap^n+k'$，$0<a<p$，$1\leqslant k'\leqslant p^n$，$n\in N$，则

$$\begin{aligned} A_{k-1}^{(\beta)}K_k^{(\beta)}(t) &= \sum_{r=1}^{ap^n+k'} A_{k-r}^{(\beta-1)} D_r(t) = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{r=1}^{a(p-1)p^j-1} A^{(\beta-1)}_{k-ap^j-r} D_{ap^j+r}(t)\\ &+ A^{(\beta-1)}_{k-ap^n}D_{ap^n}(t)+\sum_{r=1}^{k'}A^{(\beta-1)}_{k-ap^n-r}D_{ap^n+r}(t)\\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{a(p-1)p^j-1} A^{(\beta-1)}_{k-ap^j-r}\left[D_{ap^j+r}(t)-D_{ap^{j+1}}(t)\right] + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{a(p-1)p^j-1}A^{(\beta-1)}_{k-ap^j-r}D_{ap^{j+1}}(t)\\ &+ A^{(\beta-1)}_{k-ap^n}D_{ap^n}(t)+\sum_{r=1}^{k'}A^{(\beta-1)}_{k-ap^n-r}D_{ap^n+r}(t), \end{aligned}$$

由(5)式

$$\begin{aligned} D_{ap^{j+1}}(t) - D_{ap^j+r}(t) &= \sum_{s=r}^{a(p-1)p^j-1}\overline{W_{ap^j+s}(t)} = \overline{W_{ap^j}(t)}\sum_{s=r}^{a(p-1)p^j-1}\overline{W_s(t)}\\ &= \overline{W_{ap^j}(t)}\sum_{v=0}^{a(p-1)p^j-1-r}\overline{W_{a(p-1)p^j-1-v}(t)} = \overline{W_{ap^j}(t)}\,\overline{W_{a(p-1)p^j-1}(t)}\,\overline{D_{a(p-1)p^j-r}(t)}, \end{aligned} \tag{11}$$

利用(7)，(11)以及$A_k^{(\beta)}=\sum_{r=0}^{k}A_{k-r}^{(\beta-1)}$[5]得

$$\begin{aligned} A_{k-1}^{(\beta)}K_k^{(\beta)}(t) &= -\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{a(p-1)p^j-1} A^{(\beta-1)}_{k-ap^j-r}\overline{W_{ap^j}(t)}\,\overline{W_{a(p-1)p^j-1}(t)}\,\overline{D_{a(p-1)p^j-r}(t)}\\ &+ \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{a(p-1)p^j-1} A^{(\beta-1)}_{k-ap^j-r} D_{p^{j+1}}(t)R_{j+1}(t) + A^{(\beta)}_{k'}D_{p^n}(t)R_n(t) + \overline{W_{ap^n}(t)}A^{(\beta)}_{k'-1}K^{(\beta)}_{k'}(t), \end{aligned}$$

利用Abel变换

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{a(p-1)p^j-1}A^{(\beta-1)}_{k-ap^j-r}\overline{D_{a(p-1)p^j-r}(t)} &= \sum_{r=1}^{a(p-1)p^j}A^{(\beta-1)}_{k-ap^{j+1}+r}\overline{D_r(t)}\\ &= -\sum_{r=1}^{a(p-1)p^j-1} r\,\overline{K_r(t)}\,A^{(\beta-2)}_{k-ap^{j+1}+r+1} + a(p-1)p^j\,\overline{K_{a(p-1)p^j}(t)}\,A^{(\beta-1)}_{k-ap^j}. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} A_{k-1}^{(\beta)}K_k^{(\beta)}(t) &= \sum_{j=0}^{n-1}\overline{W_{ap^j}(t)}\,\overline{W_{a(p-1)p^j-1}(t)}\sum_{r=1}^{a(p-1)p^j-1} r\,\overline{K_r(t)}\,A^{(\beta-2)}_{k-ap^{j+1}+r+1}\\ &- \sum_{j=0}^{n-1}\overline{W_{ap^j}(t)}\cdot\overline{W_{a(p-1)p^j-1}(t)}\cdot a(p-1)p^j\,\overline{K_{a(p-1)p^j}(t)}\,A^{(\beta-1)}_{k-ap^j}\\ &+ \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{r=0}^{a(p-1)p^j-1}A^{(\beta-1)}_{k-ap^j-r}\right)D_{p^{j+1}}(t)R_{j+1}(t)+A^{(\beta)}_{k'}D_{p^n}(t)R_n(t)+\overline{W_{ap^n}(t)}A^{(\beta)}_{k'-1}K^{(\beta)}_{k'}(t) \end{aligned} \tag{12}$$

定理的证明

$$\|\sigma_k^{(\beta)}(f;x)-f(x)\|_{L^q}=\left\|\int_0^1 K_k^{(\beta)}(t)[f(x\oplus t)-f(x)]dt\right\|_{L^q}.$$

现将(12)中右边每项代入上式分别进行估计．记

$$Q_j(t)=\overline{W_{a(p-1)p^j-1}(t)}\sum_{r=1}^{a(p-1)p^j-1} r\,\overline{K_r(t)}\,A_{k-ap^{j+1}+r+1}^{(\beta-2)},$$

由 (3)′及(10)知
$$\int_0^1|Q_j(t)|dt\leqslant Cp^{2j+n(\beta-2)},\tag{13}$$

故

$$J_1=\left\{\int_0^1\left|\int_0^1 \overline{W_{ap^j}(t)}Q_j(t)[f(x\oplus t)-f(x)]dt\right|^q dx\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left\{\int_0^1\left|\sum_{r=0}^{p^j-1}\int_{I_{j,r}}\overline{W_{ap^j}(t)}Q_j(t)[f(x\oplus t)-f(x)]dt\right|^q dx\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

$\overline{W_{ap^j}(t)}$在 $I_{j,r}$ 上取 p 个不同的值，$\overline{W_{a(p-1)p^j-1}(t)}$ 以及 $\overline{W_k(t)}$ $(k<a(p-1)p^j-1)$在 $I_{j,r}$ 上均取复常数值，从而 $Q_j(t)$ 在 $I_{j,r}$ 上取复常数值，记此值为 $Q_{j,r}$，则

$$J_1=\left\{\int_0^1\left|\sum_{r=0}^{p^j-1}Q_{j,r}\int_{I_{j,r}}\overline{W_{ap^j}(t)}[f(x\oplus t)-f(x)]dt\right|^q dx\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

令$\int_{I_{j,r}}\overline{W_{ap^j}(t)}[f(x\oplus t)-f(x)]dt=S$，注意到$t\in I_{j,r}$时有 $t\oplus\frac{1}{p^{j+1}}\in I_{j,r}$以及$t\to t\oplus\frac{1}{p^{j+1}}$是等测变换，故

$$S=\int_{I_{j,r}}\overline{W_{ap^j}\left(t\oplus\frac{1}{p^{j+1}}\right)}\left[f\left(x\oplus t\oplus\frac{1}{p^{j+1}}\right)-f(x)\right]dt$$

$$=\omega^{-a}\int_{I_{j,r}}\overline{W_{ap^j}(t)}\left[f\left(x\oplus t\oplus\frac{1}{p^{j+1}}\right)-f(x)\right]dt.$$

从而

$$S=\frac{1}{1-\omega^a}\int_{I_{j,r}}\overline{W_{ap^j}(t)}\left[f(x\oplus t)-f\left(x\oplus t\oplus\frac{1}{p^{j+1}}\right)\right]dt.$$

由此式和 Minkowski 不等式以及(13)得

$$J_1\leqslant\sum_{r=0}^{p^j-1}|Q_{j,r}|\left\{\int_0^1\left|\frac{1}{1-\omega^a}\int_{I_{j,r}}\overline{W_{ap^j}(t)}\left[f(x\oplus t)-f\left(x\oplus t\oplus\frac{1}{p^{j+1}}\right)\right]dt\right|^q dx\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant\sum_{r=0}^{p^j-1}|Q_{j,r}|\cdot\left|\frac{1}{1-\omega^a}\right|\cdot\int_{I_{j,r}}\left\{\int_0^1\left|f(x\oplus t)-f\left(x\oplus t\oplus\frac{1}{p^{j+1}}\right)\right|^q dx\right\}^{\frac{1}{q}}dt$$

$$\leqslant\omega^{(q)}\left(f;\frac{1}{p^{j+1}}\right)\sum_{r=0}^{p^j-1}|Q_{j,r}|\cdot\left|\frac{1}{1-\omega^a}\right|\cdot\frac{1}{p^j}$$

$$=\omega^{(q)}\left(f;\frac{1}{p^{j+1}}\right)\left|\frac{1}{1-\omega^a}\right|\cdot\int_0^1|Q_j(t)|dt\leqslant C\omega^{(q)}\left(f;\frac{1}{p^{j+1}}\right)p^{2j+n(\beta-2)}.$$

同理，用(3)′得

$$J_2=\left\{\int_0^1\left|\int_0^1\overline{W_{ap^j}(t)}\,\overline{W_{a(p-1)p^j-1}(t)}\,\overline{K_{a(p-1)p^j}(t)}[f(x\oplus t)-f(x)]dt\right|^q dx\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant\omega^{(q)}(f;\frac{1}{p^{j+1}})\cdot\left|\frac{1}{1-\omega^{c}}\right|\cdot\int_0^1\left|\overline{K_{a(p-1)p^j}(t)}\right|dt\leqslant C\omega^{(q)}(f;\frac{1}{p^{j+1}}).$$

根据(2)，(8)式得

$$J_3=\left\{\int_0^1\left|\int_0^1 D_{p^{j+1}}(t)R_{j+1}(t)[f(x\oplus t)-f(x)]dt\right|^q dx\right\}^{\frac{1}{q}}\leqslant C\omega^{(q)}(f;\frac{1}{p^{j+1}}),$$

$$J_4=\left\{\int_0^1\left|\int_0^1 D_{p^n}(t)R_n(t)[f(x\oplus t)-f(x)]dt\right|^q dx\right\}^{\frac{1}{q}}\leqslant C\omega^{(q)}(f;\frac{1}{p^{n+1}}).$$

由(4)式得

$$J_5=\left\{\int_0^1\left|\int_0^1\overline{W_{ap^n}(t)}K_k^{(\beta)}(t)[f(x\oplus t)-f(x)]dt\right|^q dx\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant\omega^{(q)}(f;\frac{1}{p^{n+1}})\cdot\left|\frac{1}{1-\omega^{c}}\right|\cdot\int_0^1|K_k^{(\beta)}(t)|dt\leqslant C\omega^{(q)}(f;\frac{1}{p^{n+1}}).$$

总合$J_\mu(\mu=1,\cdots5)$．並利用 $A_{k-1}^{(\beta)}\geqslant Cp^{n\beta}$，则

$$\|\sigma_k^{(\beta)}(f;x)-f(x)\|_{L^q}=\left\{\int_0^1\left|\int_0^1 K_k^{(\beta)}(t)[f(x\oplus t)-f(x)]dt\right|^q dx\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant C\sum_{j=0}^{n-1}p^{2j-2n}\omega^{(q)}(f;\frac{1}{p^{j+1}})+C\sum_{j=0}^{n-1}p^{j-n}\omega^{(q)}(f;\frac{1}{p^{j+1}})$$

$$+C\omega^{(q)}(f;\frac{1}{p^{n+1}})\leqslant C(\frac{1}{p^n})\sum_{j=0}^{n}p^j\cdot\omega^{(q)}(f;\frac{1}{p^j}).$$

定理证毕．

当 $p=2$ 时，定理在[3]中讨论过．

推论1　对任意 $\beta>0$，$f\in L^q(0,1)\,(1\leqslant q\leqslant\infty)$，$f(x)$的 W_pFS 的(c,β)平均在 $L^q(0,1)$中按范数收敛于$f(x)$．

显然此推论蕴含了[4]中定理3．

推论2　设 $f(x)\in Lip(\alpha;q)$（即 $\omega^{(q)}(f;\delta)\leqslant C\delta^\alpha$），则对任意 $\beta>0$，

$$\|\sigma_k^{(\beta)}(f;x)-f(x)\|_{L^q}=\begin{cases}O(k^{-\alpha}), & 0<\alpha<1\\ O(\ln k/k), & \alpha=1.\end{cases}$$

参 考 文 献

[1] 郑维行，苏维宜，任福贤，关于 Walsh 分布概况，逼近论会议论文集，杭州(1978)，42—51．

[2] Chrestenson, H. E., A class of generalized Walsh functions, *Pacific J. Math.*, 5(1955), 17—31.

[3] Скворцов, В. А., Некоторые Оценки приближения функций средними чезаро рядов фурье-уолша, *Матем. заметки*, Т. 29, 4(1981), 539—547.

[4] Su Weiyi, The kernel of Abel-Poisson type on Walsh system, *Chin. Ann. of Math*, 2(Eng. Issue) (1981) 81—92.

[5] Zygmund. A., Trigonometric Series, Cambridge, 1959.