第5卷 第4期
1985年10月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.5 No.4
Oct. 1985

加权移位与BIR算子*

刘隆复 孟南

(吉林大学)

长期来，人们在追求Jordan标准型在无穷维空间上的推广，虽然困难很大，进展不多，但仍然出现了许多好工作。在不少工作中，似乎认为单胞算子是Jordan块的最合适的推广。实际上，在无穷维空间中，单胞算子起不了有限维空间中Jordan块的作用，而作为Jordan块的推广，也许应该是报告[1]中所说的BIR算子。但Jordan块与单胞算子所具有的性质，是否BIR算子也都具有呢？本文的一个主要目的，是在加权移位范围内，对BIR算子的一些问题给以回答。其次，推广了N.Suzuki的一个结果[2；定理2]；还给出了两个内射双边加权移位拟相似的充要条件；以及作为定理6的推论得到D. A. Herrero的一个结果[3；推论3(b)]在Hilbert空间的情形。

本文总是考虑内射加权移位，故可设其权都是正的。至于术语与记号均从[4]。

定义 设$T\in B(\mathscr{H})$。若有非平凡的$M\in \mathrm{Lat}\,T$与$N\in \mathrm{Lat}T$，使$\mathscr{H}=M\dotplus N$（M和N不必直交），则称T为Banach可约的算子。否则，便称T为Banach不可约的算子，简称为BIR算子。

定理1 若可逆的内射双边加权移位T的权序列$\{w_n\}$满足下列条件：

(1) $\{w_n\}$不是周期的，

(2) 存在$K_1>0$，$K_2>0$，使对某个$C>0$有$K_1\leqslant C^{n+1-m}/w_m\cdots w_n\leqslant K_2$ （一切$m\leqslant n$），则T是Banach可约的，但不是Hilbert可约的。

证明 设S是权为常数c的内射双边加权移位，则S是一正规算子。根据假设条件(2)及[4；定理2(a)]，T和S相似。于是T是标算子，故T是Banach可约的。又根据假设条件(1)及[5；定理4]，T不是Hilbert可约的。 ▮

T. B. Hoover在[6]中曾举出一个拟相似于一酉算子的Hilbert不可约的算子的例子。现在我们可以进而举出一个相似于一酉算子的Hilbert不可约的算子的例子。

例1 设U是不加权的双边移位。T是权为$w_0=\frac{1}{2}$，$w_n=1\,(n=\pm1,\ \pm2,\cdots)$的可逆的内射双边加权移位。则$T$是Hilbert不可约的，并且$T$与酉算子$U$相似。 ▮

BIR算子的谱除了我们已经知道有单连通区域的之外，还可以是一个复连通区域。例如，设T是可逆的内射双边加权移位，并且$r_1(T)\neq r(T)$，则根据[7；推论2]，T是BIR的。由[4；定理5(a)]，$\sigma(T)=\{z;\ r_1(T)\leqslant|z|\leqslant r(T)\}$。注意这时$r_1(T)=[r(T^{-1})]^{-1}>0$，故$T$的谱是一个环域。

*1981年12月30日收到。

定理2　对于每一个可逆的内射双边加权移位T，都存在非平凡的不变子空间而它不是超不变的。

证明　因T是可逆的内射双边加权移位，故$T^{-1}\in\mathscr{A}^a(T)=\{T\}'$。令$\mathscr{H}_0=\bigvee_{n=0}^{\infty}\{e_n\}$，则显然$\mathscr{H}_0\in\mathrm{Lat}T$。假如$\mathscr{H}\in\mathrm{Lat}T^{-1}$，则$T^{-1}|\mathscr{H}_0$便是$T_0\overset{Def}{=}T|\mathscr{H}_0$的逆，于是$0\notin\sigma(T_0)$。但$T_0$是内射单边加权移位，由[4；定理4]，$\sigma(T_0)=\{z;\ |z|\leqslant r(T_0)\}$，故$0\in\sigma(T_0)$，产生矛盾。所以$\mathscr{H}\notin\mathrm{Lat}T^{-1}$。∎

特别，当T是那种$r_1(T)\neq r(T)$的可逆的内射双边加权移位时，它是BIR算子。由定理2知道，这种BIR算子T的非平凡不变子空间就不都是超不变的。

现在利用Banach约化的概念可将N. Suzuki的[2；定理2]推广如下。

定理3　若T是BIR算子，并且T的谱关于原点对称，则T是谱算子当且仅当T是拟幂零的。

证明　只须证明必要性。设T是谱算子，E是它的单位分解。由于T是BIR算子，故对任何Borel集δ，有$E(\delta)=0$或I。于是$\sigma(T)$必是单点集。假如不然，则$\sigma(T)$至少含有两个不同的点λ_1和λ_2。设δ_1是以λ_1为心，以$\frac{1}{2}|\lambda_1-\lambda_2|$为半径的圆域与$\sigma(T)$的交集，则由单位分解的定义，有$\sigma(T|E(\delta_1)\mathscr{H})\subseteq\bar{\delta}_1\subsetneqq\sigma(T)$，$\sigma(T|E(\sigma(T)\backslash\delta_1\mathscr{H})\subseteq\overline{\sigma(T)\backslash\delta_1}\subsetneqq\sigma(T)$.从而$E(\delta_1)\neq I$，故$E(\sigma(T_1\backslash\delta_1)\neq I$又因$E(\delta_1)+E(\sigma(T)\backslash\delta_1)=E(\sigma(T))=I$，故$E(\delta_1)\neq0$。于是$E(\delta_1)\neq0,I$产生矛盾。因此$\sigma(T)$是单点集。设$\sigma(T)=\{\lambda\}$，则由于$\sigma(T)$关于原点对称，故必有$\lambda=0$，即$T$是拟幂零的。∎

下面的例子说明，定理3中的条件“T的谱关于原点对称”是不可缺少的。

例2　设$T=\lambda I+D$，其中$\lambda\neq0$是一常数，D是Donoghue算子。则T是单胞的，从而是BIR的，并且是非拟幂零的谱算子。

推论1　不可逆的内射双边加权移位是谱算子当且仅当它是拟幂零的。

推论2　设T是可逆的内射双边加权移位。若$r_1(T)\neq r(T)$，则T非谱算子。

证明　因$\sigma(T)=\{z;\ r_1(T)\leqslant|z|\leqslant r(T)\}$，故由定理3，$T$非谱算子。

定理4　设S和T分别是以$\{v_n\}$和$\{w_n\}$为权序列的内射双边加权移位，则S和T拟相似的充要条件为有整数k和l以及常数$c_1>0$，$c_2>0$，使下列不等式成立：

$$\begin{cases}0<w_k\cdots w_{k+n}/v_0\cdots v_n\leqslant c_1 & (n\geqslant0),\\ 1/c_1\leqslant w_{k+n}\cdots w_{k+n}/v_{-1}\cdots v_n & (n<0),\\ 1/c_1\leqslant w_l\cdots w_{l+n}/v_0\cdots v_n & (n\geqslant0),\\ 0<w_{l-1}\cdots w_{l+n}/v_{-1}\cdots v_n\leqslant c_2 & (n<0).\end{cases}$$

利用定理4，可以构造出两个BIR的内射双边加权移位是拟相似而非相似的例子。

例3　设T和S分别是以

$$w_n=\frac{1}{(|n|+1)^2}\text{，一切}n\text{；}\quad v_n=\begin{cases}\dfrac{1}{(n+1)^2}, & n\geqslant0,\\ \dfrac{1}{n^2}, & n<0\end{cases}$$

为权序列的两个内射双边加权移位，则T和S都是BIR的，并且它们拟相似而非相似。

定理5　设T是表为$H^2(\beta)$上的M_z的内射单边加权移位，$\Pi_0(T^*)=\{0\}$。若$f\in H^2(\beta)$是T的循环向量，则对于任何常数项不为零的多项式p，pf都是T的循环向量。

证明　由于T的压缩谱$\Gamma(T)$具有圆对称性，而有

$$\Gamma(M_z)=\Gamma(T)=\Pi_0(T^*)=\{0\},$$

并由$\Gamma(p(M_z))=p(\Gamma(M_z))$知道，对常数项不为零的多项式$p$有$0\notin\Gamma(p(M_z))$，即$M_p=p(M_z)$是稠值域的。再由$\overline{\mathscr{A}(M_z)f}=H^2(\beta)$，得到$\overline{\mathscr{A}(M_z)(pf)}=\overline{\mathscr{A}(M_z)M_pf}=\overline{M_p\mathscr{A}(M_z)f}=\overline{M_p\overline{\mathscr{A}(M_z)f}}=\overline{M_pH^2(\beta)}=H^2(\beta)$。于是$pf$是$T$的循环向量。 ▮

推论3　若T是表为$H^2(\beta)$上的M_z的内射单边加权移位，并且$\Pi_0(T^*)=\{0\}$，则任何常数项不为零的多项式都是T的循环向量。

定理6　设T是表为$L^2(\beta)$上的M_z的内射双边加权移位。若$f\in L^2(\beta)$是T的循环向量，则对于任何非零多项式p，pf都是T的循环向量。

推论4　(D. A. Herrero)。若T是内射双边加权移位，并且有循环向量，则T的循环向量集在$\mathscr{H}$中稠密。

由下面的定理可以看出，可逆的亚正规的内射双边加权移位除了是正规的。便是BIR的。

定理7　若T是可逆的亚正规的内射双边加权移位，则下列陈述等价：

(i) T是Banach可约的；(ii) T是Hilbert可约的；

(iii) T是正规的；(iv) $\sigma(T)=\{z;\ |z|=\|T\|\}$。

证明　因T是亚正规的内射双边加权移位，故$0<w_n\leqslant w_{n+1}$(一切n)。于是分别由[4；命题2，命题14]有

$w_n\to\sup w_n=\|T\|\quad(n\to+\infty)$，$w_n\to\inf w_n=m(T)\quad(n\to-\infty)$。

由[4；命题15]有

$$r_1^+=r^+=\|T\|,\quad r_1^-=r^-=m(T).$$

再由[4；定理 7 的推论]有

(1)　$$r_1(T)=\min\{r_1^-,\ r_1^+\}=m(T),\quad r(T)=\max\{r^-,\ r^+\}=\|T\|.$$

故T的谱为

(2)　$$\sigma(T)=\{z;\ m(T)\leqslant|z|\leqslant\|T\|\}.$$

(iii)⇒(ii)⇒(i)是显然的。

(i)⇒(iv)：若T是Banach可约的，则由(1)式知道$m(T)=\|T\|$。由(2)式便得到(4)。

(iv)⇒(iii)：由(iv)及(2)式知道$m(T)=\|T\|$。从而$\inf w_n=\sup w_n$，于是$w_n=\|T\|$(一切n)，故T是正规的。 ▮

参 考 文 献

[1] 江泽坚，《关于BIR算子的若干问题Ⅰ，Ⅱ》，在吉林大学泛函分析讨论班上的报告，1979.

[2] Suzuki, N., On the irreducibility of weighted Shifts, *Proc. Amer. Math. Soc.* 22 (1969), 579-581.

[3] Herrero, D. A., Possible structures for the set of cyclic vector.s *Indiana Univ. Math, J.* 28 (1979), 913-926.

[4] Shields, A. L., Weighted shift operators and analytic function theory in Math. Surveys, Vol.13, Topics in Operator Theory, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1974.

[5] Nikol'skil, N. K., On invariant subspaces of weighted shift operator, *Mat. Sb.* 74(116)(1967), 171-190.

[6] Hoover, T. B., Quasi-similarity of operators, *Illinois* J. Math. 16(1972), 673-686.

[7] Gellar, R., Operators commuting with a weighted shift, *Proc. Amer. Math, Soc.* 23 (1969), 538-545.

来 函 摘 登

中国科技大学徐俊明同志来信：本刊1984年第四期第85—86页所载“关于Simon和Murty猜想的证明”一文中，只证了特殊情形，而并未作出一般情形下该猜想的证明，应予申明，以免继续造成不好影响。

编辑部