第5卷 第4期
1985年10月
数学研究与评论
JOURNAL OF NATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.5 No.4
Oct. 1985

变系数迭代系统零解的稳定性*

王慕秋 王联

（中国科学院数学研究所）

在文[1]中我们曾用分解理论研究了常系数线性迭代系统

$$x(\tau+1)=px(\tau) \tag{1}$$

零解的稳定性，这里 $\tau\in I\triangleq\{t_0+k\}$，$t_0\geqslant 0$，$k=0$，1，2，…，对子系统所用的是二次型的 Ляпунов 函数。本文将研究变系数线性迭代系统

$$x(\tau+1)=p(\tau)x(\tau) \tag{2}$$

零解的稳定性问题，这里，$\tau\in I$，我们仍用分解理论，但对子系统所作的Ляпунов函数为 $V^{(i)}=|x^{(i)}|$（$|x|$ 表示向量 x 的模）。当采用这种形式的 Ляпунов 函数时，运算可以大为简化，说明对处理线性迭代系统的稳定性问题时，用 $V^{(i)}=|x^{(i)}|$ 比用二次型的 Ляпунов函数更合适。最后，我们还考虑了一类非线性时变系数迭代系统的稳定性。

§1 **线性迭代系统** 考虑线性迭代系统

$$x(\tau+1)=p(\tau)x(\tau) \tag{2}$$

这里 $\tau\in I$，$x\in R^n$，$p(\tau)$ 是 $n\times n$ 阶矩阵，系统（2）具有分解

$$\begin{pmatrix} x^{(1)}(\tau+1)\\ x^{(2)}(\tau+1)\\ \vdots\\ x^{(r)}(\tau+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_{11}(\tau) & & & 0\\ & p_{22}(\tau) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & p_{rr}(\tau)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{(1)}(\tau)\\ x^{(2)}(\tau)\\ \vdots\\ x^{(r)}(\tau)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & p_{12}(\tau)\cdots p_{1r}(\tau)\\ p_{21}(\tau) & 0\quad\cdots p_{2r}(\tau)\\ \vdots & \ddots\quad\vdots\\ p_{r1}(\tau)p_{r2}(\tau)\cdots & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{(1)}(\tau)\\ x^{(2)}(\tau)\\ \vdots\\ x^{(r)}(\tau)\end{pmatrix} \tag{3}$$

这里 $x^{(i)}\in R^{n_i}(i=1,\cdots,r)$，$\sum\limits_{i=1}^{r}n_i=n$；$p_{ii}(\tau)$是$n_i\times n_i$阶矩阵，对所有$\tau\in I$，有$\|p_{ii}(\tau)\|<1$（$\|A\|$表示矩阵$A$的模），$(i=1,\cdots,r)$；关联项系数$p_{ij}(\tau)$ 是 $n_i\times n_j$ 阶矩阵（i，$j=1,\cdots,r$；$i\neq j$）。

先考虑孤立子系统

$$x^{(i)}(\tau+1)=p_{ii}(\tau)x^{(i)}(\tau)\qquad (i=1,\cdots,r) \tag{4}$$

对系统（4）作正定 Ляпунов 函数

$$V^{(i)}(x^{(i)})=|x^{(i)}|,$$

则有

$$\begin{aligned}DV^{(i)}_{(4)}(x^{(i)})&=|x^{(i)}(\tau+1)|-|x^{(i)}(\tau)|=|p_{ii}(\tau)x^{(i)}(\tau)|-|x^{(i)}(\tau)|\\ &\leqslant\|p_{ii}(\tau)\||x^{(i)}(\tau)|-|x^{(i)}(\tau)|=-(1-\|p_{ii}(\tau)\|)|x^{(i)}(\tau)|,\end{aligned}$$

*1982年11月20日收到。

因为$\|p_{ii}(\tau)\|<1$，对所有$\tau\in I$，故有$DV_{(4)}^{(i)}(x^{(i)})\leqslant 0$，即$DV_{(4)}^{(i)}(x^{(i)})$为负定，所以子系统（4）的零解是渐近稳定的。

对系统（3）我们作Ляпунов函数

$$V=\sum_{i=1}^{r}V^{(i)}(x^{(i)})=\sum_{i=1}^{r}|x^{(i)}|$$

显然，V是正定的。

$$\begin{aligned}DV_{(3)}&=\sum_{i=1}^{r}\{|x^{(i)}(\tau+1)|-|x^{(i)}(\tau)|\}=\sum_{i=1}^{r}\{|\sum_{j=1}^{r}p_{ij}(\tau)x^{(j)}(\tau)|-|x^{(i)}(\tau)|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{r}\{\sum_{j=1}^{r}|p_{ij}(\tau)x^{(j)}(\tau)|-|x^{(i)}(\tau)|\}\leqslant\sum_{i=1}^{r}\{\sum_{j=1}^{r}\|p_{ij}(\tau)\||x^{(j)}(\tau)|-|x^{(i)}(\tau)|\}\\&=\sum_{i=1}^{r}\{-(1-\|p_{ii}(\tau)\|)|x^{(i)}(\tau)|+\sum_{j=1,j\neq i}^{r}\|p_{ij}(\tau)\||x^{(j)}(\tau)|\}.\end{aligned}$$

令$A=\min\limits_{\tau\in I,i=1,\cdots,r}\{(1-\|p_{ii}(\tau)\|)\}$，$\varepsilon=\max\limits_{\substack{\tau\in I,i\neq j\\ i,j=1,\cdots,r}}\{\|p_{ij}\|\}$

则有

$$DV_{(3)}\leqslant -A\sum_{i=1}^{r}|x^{(i)}(\tau)|+(r-1)\varepsilon\sum_{i=1}^{r}|x^{(i)}(\tau)|=(-A+(r-1)\varepsilon)\sum_{i=1}^{r}|x^{(i)}(\tau)|,$$

如果 $\varepsilon<\dfrac{A}{2(r-1)}$，则有

$$DV_{(3)}\leqslant-\frac{A}{2}\sum_{i=1}^{r}|x^{(i)}|\leqslant 0,$$

即$DV_{(3)}$是负定的，所以系统（2）的零解是渐近稳定的，由此得出下面定理：

定理1 如果系统(2)具有分解(3)，在(3)中假设对所有$\tau\in I$，有$\|p_{ii}(\tau)\|<1$ $(i=1,\cdots,r)$，且令$A=\min\limits_{\tau\in I,i=1,\cdots,r}\{(1-\|p_{ii}(\tau)\|)\}$，$\varepsilon=\max\limits_{\substack{\tau\in I,i\neq j\\ i,j=1,\cdots,r}}\{\|p_{ij}(\tau)\|\}$，如果满足$\varepsilon<\dfrac{A}{2(r-1)}$，则系统（2）的零解是渐近稳定的。

注1 针对具体问题，以上不等式的估计还可以更精确一些。

注2 因为是线性系统，所以稳定性具有全局性质。

系 考虑n阶线性迭代系统

$$\begin{pmatrix}x_1(\tau+1)\\x_2(\tau+1)\\\vdots\\x_n(\tau+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{11}(\tau)p_{12}(\tau)\cdots p_{1n}(\tau)\\p_{21}(\tau)p_{22}(\tau)\cdots p_{2n}(\tau)\\\cdots\cdots\cdots\\p_{n1}(\tau)p_{n2}(\tau)\cdots p_{nn}(\tau)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(\tau)\\x_2(\tau)\\\cdots\\x_n(\tau)\end{pmatrix}\tag{5}$$

零解的稳定性，这里$\tau\in I$，$x_i\in R^1$，设（5）具有分解

$$\begin{pmatrix}x_1(\tau+1)\\x_2(\tau+1)\\\vdots\\x_n(\tau+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{11}(\tau)&&0\\&p_{22}(\tau)&\\&&\ddots\\0&&p_{nn}(\tau)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(\tau)\\x_2(\tau)\\\vdots\\x_n(\tau)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&p_{12}(\tau)\cdots p_{1n}(\tau)\\p_{21}(\tau)&0\quad\cdots p_{2n}(\tau)\\\vdots&\ddots\quad\vdots\\p_{n1}(\tau)&p_{n2}(\tau)\cdots\quad 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(\tau)\\x_2(\tau)\\\vdots\\x_n(\tau)\end{pmatrix}\tag{5)*}$$

如果$|p_{ii}(\tau)|<1$。当$\tau\in I$，$i=1,\cdots,n$；且令

$A=\min\limits_{\substack{\tau\in I,\\ i=1,\cdots,n}}\{|1-p_{ii}(\tau)|\}$，$\varepsilon=\max\limits_{\substack{\tau\in I,i\neq j\\ i,j=1,\cdots,n}}\{p_{ij}(\tau)\}$，则当$\varepsilon<\dfrac{A}{2(n-1)}$时，系统（5）的零

解是渐近稳定的。

证　取 n 个子系统为

$$x_i(\tau+1)=p_{ii}(\tau)x_i(\tau)\qquad i=1,\cdots,n, \tag{6}$$

对每个子系统作正定 Ляпунов 函数

$$V^{(i)}(x_i)=|x_i|\qquad\qquad (i=1,\cdots,n),$$

显然

$$DV^{(i)}_{(6)}(x_i)=-(1-|p_{ii}(\tau)|)|x_i|\qquad (i=1,\cdots,n),$$

因为当 $\tau\in I$ 时，有 $|p_{ii}(\tau)|<1$，故 $DV^{(i)}_{(6)}(x_i)$ 为负定，所以系统（6）的零解是渐近稳定的。

对系统（5）作 Ляпунов 函数

$$V=\sum_{i=1}^{n}V^{(i)}=\sum_{i=1}^{n}|x_i|,$$

显然 V 为正定，且有

$$\begin{aligned}DV_{(5)}&=\sum_{i=1}^{n}\Big[|x_i(\tau+1)|-|x_i(\tau)|\Big]=\sum_{i=1}^{n}\Big[\Big|\sum_{j=1}^{n}p_{ij}(\tau)x_j(\tau)\Big|-|x_i(\tau)|\Big]\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{j=1}^{n}|p_{ij}(\tau)||x_j(\tau)|-|x_i(\tau)|\Big]\\&=\sum_{i=1}^{n}\Big[-(1-|p_{ii}(\tau)|)|x_i(\tau)|+\sum_{j=1,i\neq j}^{n}|p_{ij}(\tau)||x_j(\tau)|\Big]\\&\leqslant-A\sum_{i=1}^{n}|x_i(\tau)|+(n-1)\varepsilon\sum_{i=1}^{n}|x_i(\tau)|=(-A+(n-1)\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}|x_i(\tau)|,\end{aligned}$$

因为 $\varepsilon<\dfrac{A}{2(n-1)}$，故有 $DV_{(5)}\leqslant-\dfrac{A}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$，即 $DV_{(5)}$ 为负定，故系统（5）的零解为渐近稳定，证毕。

下面以 $n=2$ 为例，即考虑

$$\begin{cases}x_1(\tau+1)=p_{11}(\tau)x_1(\tau)+p_{12}(\tau)x_2(\tau)\\x_2(\tau+1)=p_{21}(\tau)x_1(\tau)+p_{22}(\tau)x_2(\tau),\end{cases} \tag{7}$$

这里 $\tau\in I$，$x_i\in R^1$，当 $\tau\in I$ 时，$|p_{ii}(\tau)|<1$，$i=1$，2。

先考虑子系统

$$\begin{cases}x_1(\tau+1)=p_{11}(\tau)x_1(\tau)\\x_2(\tau+1)=p_{22}(\tau)x_2(\tau),\end{cases} \tag{8}$$

对系统（8）作正定 Ляпунов 函数 $V^{(i)}=|x_i|$，$(i=1,\ 2)$，则有

$$\begin{aligned}DV^{(i)}_{(8)}(x_i)&=|x_i(\tau+1)|-|x_i(\tau)|=|p_{ii}(\tau)||x_i(\tau)|-|x_i(\tau)|\\&=-(1-|p_{ii}(\tau)|)|x_i(\tau)|\qquad (i=1,\ 2)\end{aligned}$$

因为当 $\tau\in I$ 时，有 $|p_{ii}(\tau)|<1$，故有 $DV^{(i)}_{(8)}(x_i)\leqslant0$，$(i=1,\ 2)$，即 $DV^{(i)}_{(8)}(x_i)$ $(i=1,\ 2)$ 为负定，所以系统（8）的零解为渐近稳定的。

取$V=V^{(1)}+V^{(2)}=|x_1|+|x_2|$为系统（7）的 Лялунов 函数，显然$V$为正定，这时

$$
\begin{aligned}
DV_{(7)}&=[|x_1(\tau+1)|-x_1(\tau)|]_{(7)}+[|x_2(\tau+1)|-|x_2(\tau)|]_{(7)}\\
&=[|p_{11}(\tau)x_1(\tau)+p_{12}(\tau)x_2(\tau)|-|x_1(\tau)|]+\\
&\quad+[|p_{21}(\tau)x_1(\tau)+p_{22}(\tau)x_2(\tau)|-|x_2(\tau)|]\\
&\leqslant[|p_{11}(\tau)||x_1(\tau)|+|p_{12}(\tau)||x_2(\tau)|-|x_1(\tau)|]\\
&\quad+[|p_{21}(\tau)||x_1(\tau)|+|p_{22}(\tau)||x_2(\tau)|-|x_2(\tau)|]\\
&=-(1-|p_{11}(\tau)|)|x_1(\tau)|-(1-|p_{22}(\tau)|)|x_2(\tau)|\\
&\quad+|p_{12}(\tau)||x_2(\tau)|+|p_{21}(\tau)||x_1(\tau)|.
\end{aligned}
$$

令$A=\min\limits_{\tau\in I}\{(1-|p_{11}(\tau)|),(1-|p_{22}(\tau)|)\}$，$\varepsilon=\max\limits_{\tau\in I}\{|p_{12}(\tau)|,|p_{21}(\tau)|\}$则有

$$
\begin{aligned}
DV_{(7)}&\leqslant-A(|x_1(\tau)|+|x_2(\tau)|)+\varepsilon(|x_1(\tau)|+|x_2(\tau)|)\\
&=(-A+\varepsilon)(|x_1(\tau)|+|x_2(\tau)|).
\end{aligned}
$$

如果$\varepsilon<\frac{A}{2}$，则有$DV_{(7)}\leqslant 0$，即$DV_{(7)}$为负定，这时系统（7）的零解是渐近稳定的。综合上面的讨论，我们得到如下结论：

如果系统（7）中的$|p_{ii}(\tau)|<1$，当$\tau\in I$（$i=1$，2），令$A=\min\limits_{\tau\in I}\{(1-|p_{11}(\tau)|)$，$(1-|p_{22}(\tau)|\}$，$\varepsilon=\max\limits_{\tau\in I}\{|p_{12}(\tau),|p_{21}(\tau)|\}$，则当$\varepsilon<\frac{A}{2}$时，系统（7）的零解是渐近稳定的。

§2．非线性迭代系统　　研究非线性迭代系统

$$
\begin{cases}
x_1(\tau+1)=A_1(\tau)x_1(\tau) & +b_1(\tau)f_1(\sigma)\\
x_2(\tau+1)=\qquad A_2(\tau)x_2(\tau) & +b_2(\tau)f_2(\sigma)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
x_r(\tau+1)=\qquad\qquad A_r(\tau)x_r(\tau) & +b_r(\tau)f_r(\sigma)\\
\qquad\sigma=c_1^T(\tau)x_1(\tau)+\cdots+c_r^T(\tau)x_r(\tau) &
\end{cases}
\tag{9}
$$

这里$\tau\in I$，$x_i\in R^{n_i}$；$A_i(\tau)$是一个$n_i\times n_i$阶矩阵，对$\tau\in I$，有$\|A_i(\tau)\|<1$；$c_i(\tau)\in R^{n_i}$，$b_i(\tau)\in R^{n_i}$，$f_i:R\to R$，$|f(\sigma)|\leqslant l_i|\sigma|$，$l_i>0$为常量，$i=1,\cdots$，$r$，$n_1+\cdots n_r=n$。$T$表示向量的转置。

显然，$|f_i(\sigma)|\leqslant l_i|\sum\limits_{k=1}^{r}|C_k^T(\tau)x_k(\tau)|\leqslant l_i\sum\limits_{k=1}^{r}|C_k^T(\tau)x_k(\tau)|\leqslant l_i\sum\limits_{k=1}^{r}|C_k(\tau)||x_k(\tau)|$。

先考虑子系统

$$x_i(\tau+1)=A_i(\tau)x_i(\tau)\qquad(i=1,\cdots,r)\tag{10}$$

对系统（10）作 Лялунов 函数

$$V^{(i)}(x_i)=|x_i|\qquad(i=1,\cdots,r)$$

则有

$$
\begin{aligned}
DV_{(10)}^{(i)}(x_i)&=|x_i(\tau+1)|-|x_i(\tau)|=|A_i(\tau)x_i(\tau)|-|x_i(\tau)|\\
&\leqslant\|A_i(\tau)\||x_i(\tau)|-|x_i(\tau)|=-(1-\|A_i(\tau)\|)|x_i(\tau)|,
\end{aligned}
$$

因为当$\tau\in I$时，有$\|A_i(\tau)\|<1$（$i=1,\cdots,r$），故$DV_{(10)}^{(i)}(x_i)$为负定，所以系统（10）的零解是渐近稳定的。

现对系统（9）作 Ляпунов 函数

$$V=\sum_{i=1}^{r}V^{(i)}(x_i)=\sum_{i=1}^{r}|x_i|\ ,$$

显然V为正定，且有

$$DV_{(9)}=\sum_{i=1}^{r}\Big[|x_i(\tau+1)|-|x_i(\tau)|\Big]=\sum_{i=1}^{r}\Big[|A_i(\tau)x_i(\tau)+b_i(\tau)f_i(\sigma)|-|x_i(\tau)|\Big]$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{r}\Big[|A_i(\tau)x_i(\tau)|+|b_i(\tau)f_i(\sigma)|-|x_i(\sigma)|\Big]$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{r}\Big[\|A_i(\tau)\||x_i(\tau)|+|b_i(\tau)||f_i(\sigma)|-|x_i(\tau)|\Big]$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{r}\Big[\|A_i(\tau)\||x_i(\tau)|+|b_i(\tau)|l_i\sum_{k=1}^{r}|C_k(\tau)||x_k(\tau)|-|x_i(\tau)|\Big]$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\Big[-(1-\|A_i(\tau)\|)|x_i(\tau)|+|b_i(\tau)|l_i\sum_{k=1}^{r}|C_k(\tau)||x_k(\tau)|\Big].$$

令$A=\min\limits_{\tau\in I,i=1\cdots,r}\{(1-\|A_i(\tau)\|\}$，$C=\max\limits_{\tau\in I,k=1,\cdots,r}\{|C_k(\tau)|\}$

$$B_s=\max_{\tau\in I}\{|b_s(\tau)|\},\ s=1,\cdots,r.$$

则有

$$DV_{(9)}\leqslant-A\sum_{k=1}^{r}|x_i|+\Big(C\sum_{k=1}^{r}l_kB_k\Big)\sum_{i=1}^{r}|x_i|$$

$$=(-A+C\sum_{k=1}^{r}l_kB_k)\sum_{i=1}^{r}|x_i|,$$

如果满足$C\sum\limits_{k=1}^{r}l_kB_k<\dfrac{A}{2}$，则有

$$DV_{(9)}\leqslant-\frac{A}{2}\sum_{i=1}^{r}|x_i|$$

即$DV_{(9)}$为负定，故系统（9）的零解是渐近稳定的，由此我们得到

定理 2　如果系统(9)中的$\|A_i(\tau)\|<1$对所有$\tau\in I$都成立，令$A=\min\limits_{\tau\in I,i=1,\cdots,r}\{(1-\|A_i(\tau)\|$，$C=\max\limits_{\tau\in I,k=1,\cdots,r}\{|C_k(\tau)|\}$，$B_s=\max\limits_{\tau\in I}\{|b_s(\tau)|\}$，$s=1,\cdots,r$，且满足$C\sum\limits_{k=1}^{r}l_kB_k<\dfrac{A}{2}$，则系统（9）的零解是渐近稳定的。

参考文献

[1]　王慕秋、刘永清、王联，分解理论在线性迭代系统中的应用，数学研究与评论，1982，(3)，33—40.