第5卷 第4期
1985年10月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.4
Oct. 1985

非自治系统的全局稳定性*

卢亭鹤 金均

（上海师范学院数学系）

文[1]研究了带有一个非自治项的四阶微分方程的全局稳定性，它推广了[2]的结果。本文研究一般的四阶非自治微分方程

$$\ddddot{x}+f(t,x,\dot{x},\ddot{x})\dddot{x}+g(t,x,\dot{x},\ddot{x})+h(t,x,\dot{x})+\varphi(t,x)=p(t,x,\dot{x},\ddot{x},\dddot{x}) \tag{1}$$

的全局渐近稳定性。对这个方程，我们构造了所需要的Ляпунов函数，并参照文[3][4]的办法，作出了易于检验的判定四阶非自治系统全局渐近稳定的充分条件。

引理 对于n阶微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=F(t,x) \tag{*}$$

其中$F(t,x)$在$I\times R^n$内连续，$F(t,0)=0$，$I=[0,\infty)$，R^n为n维欧几里得空间，如果存在连续可微的Ляпунов函数$V(t,x)$，它在区域$I\times R^n$内满足

1）$V(t,x)$是具有无穷大下限和无穷小上界的正定函数；

2）$\left.\dfrac{dV(t,x)}{dt}\right|_{(*)}\leqslant-\xi(x)+q(t)V(t,x)$.

这里$\xi(x)$是R^n中的正定函数，而$q(t)$在I上是非负的可积函数，即$\int_0^\infty q(t)dt=N<\infty$.
那么系统(*)的零解是全局渐近稳定的。

此引理是文[4]中定理4.1当$m=0$时的特例，所以证明从略。

现在我们来研究方程（1）的零解的全局渐近稳定性。为此，作方程（1）的等价方程组

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=x_3,\quad \dot{x}_3=x_4,\\ \dot{x}_4=-f(t,x_1,x_2,x_3)x_4-g(t,x_1,x_2,x_3)-h(t,x_1,x_2)\\ \qquad -\varphi(t,x_1)+p(t,x_1,x_2,x_3,x_4),\end{cases} \tag{2}$$

这里设$g(t,0,0,0)\equiv0$，$h(t,0,0)\equiv0$，$\varphi(t,0)\equiv0$，$p(t,0,0,0,0)\equiv0$.

定理 设系统（2）在区域$I\times R^4$中满足下列条件：

1）$f(t,x_1,x_2,x_3)$，$g(t,x_1,x_2,x_3)$，$h(t,x_1,x_2)$，$\varphi(t,x_1)$关于各自的变量连续可微，而且

$$f'_t(t,x_1,x_2,x_3)+x_2f'_{x_1}(t,x_1,x_2,x_3)+x_3f'_{x_2}(t,x_1,x_2,x_3)\leqslant0,$$
$$x_3[g'_t(t,x_1,x_2,x_3)+x_2g'_{x_1}(t,x_1,x_2,x_3)+x_3g'_{x_2}(t,x_1,x_2,x_3)]\leqslant0,$$
$$x_2[h'_t(t,x_1,x_2)+x_2h'_{x_1}(t,x_1,x_2)]\leqslant0,$$
$$x_1\varphi'_t(t,x_1)\leqslant0;$$

*1982年12月23日收到.

2) $g(t,x_1,x_2,0)\equiv 0$, $h(t,x_1,0)\equiv 0$，而且存在正的常数 a,b,c，e 和 δ，使得

$$0\leqslant f(t,x_1,x_2,x_3)-a\leqslant \frac{D\delta\sqrt{e}}{\sqrt{2(D^2+E^2)}},$$

$$0\leqslant \frac{g(t,x_1,x_2,x_3)}{x_3}-b\leqslant \frac{D\delta\sqrt{3e}}{2\sqrt{D^2+E^2}}\ (x_3\neq 0),$$

$$0\leqslant \frac{h(t,x_1,x_2)}{x_2}-c\leqslant \frac{D\delta e}{\sqrt{2(eA^2+D^2)}}\ (x_2\neq 0),$$

$$0\leqslant \frac{\varphi(t,x_1)}{x_1}-e\leqslant \frac{D\delta\sqrt{e}}{2\sqrt{A^2+B^2}}\ (x_1\neq 0),$$

其中 $A=ab+bc$，$B=a^2b+a^2e+c^2$，$E=ab^2+abe-bc$，$D=abc-a^2e-c^2>0$，$0<\delta<1$。

3) $|p(t,x_1,x_2,x_3,x_4)|\leqslant p_1(t)\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}$，其中$p_1(t)\geqslant 0$，

$\int_0^\infty p_1(t)dt<\infty$。

则系统(2)的零解是全局渐近稳定的。

证明 作Ляуиунов函数

$$\begin{aligned}V(t,x_1,x_2,x_3,x_4)&=\tfrac{1}{2}(cD+eE)x_1^2+(eB+bD)x_1x_2+(aD+eA)x_1x_3\\&+Dx_1x_4+\tfrac{1}{2}(bE+cB-eA-aD)x_2^2+(bB-D)x_2x_3+Ex_2x_4\\&+\tfrac{1}{2}(bA+aB-E)x_3^2+Bx_3x_4+\tfrac{1}{2}Ax_4^2+E\int_0^{x_1}[\varphi(t,\xi)-e\xi]d\xi\\&+B\int_0^{x_2}[h(t,x_1,\xi)-c\xi]d\xi+A\int_0^{x_3}[g(t,x_1,x_2,\xi)-b\xi]d\xi\\&+B\int_0^{x_3}[f(t,x_1,x_2,\xi)-a]\xi d\xi,\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}\Big|_{(2)}&=cDx_1x_2+(Be+bD)x_1x_3+(aD+Ae)x_1x_4\\&+(Be+bD)x_2^2+bEx_2x_3+bBx_2x_4+(bB-D)x_3^2+Bx_4^2\\&+(Dx_1+Ex_2+Bx_3+Ax_4)p(t,x_1,x_2,x_3,x_4)-f(t,x_1,x_2,x_3)(Dx_1x_4+Ex_2x_4\\&+Ax_4^2)-g(t,x_1,x_2,x_3)(Dx_1+Ex_2+Bx_3)-h(t,x_1,x_2)(Dx_1+Ex_2+Ax_4)\\&-\varphi(t,x_1)(Dx_1+Bx_3+Ax_4)+E\int_0^{x_1}\varphi_t'(t,\xi)d\xi+B\int_0^{x_2}[h_t'(t,x_1\xi)\\&+x_2h_{x_1}'(t,x_1\xi)]d\xi+A\int_0^{x_3}[g_t'(t,x_1,x_2,\xi)+x_2g_{x_1}'(t,x_1,x_2,\xi)\\&+x_3g_{x_2}'(t,x_1,x_2,\xi)]d\xi+B\int_0^{x_3}[f_t'(t,x_1,x_2,\xi)+x_2f_{x_1}'(t,x_1,x_2,\xi)\\&+x_3f_{x_2}'(t,x_1,x_2,\xi)]\xi d\xi.\end{aligned}$$

由于条件1)、3)及$Be+bD=cE-eD$，$bB=aE+cA$，所以得到

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}&\leqslant cDx_1x_2+(Be+bD)x_1x_3+(aD+Ae)x_1x_4+(cE-eD)x_2^2\\&+bEx_2x_3+(aE+cA)x_2x_4+(bB-D)x_3^2+Bx_4^2-f(t,x_1,x_2,x_3)(Dx_1+Ex_2+Ax_4)x_4\\&-g(t,x_1,x_2,x_3)(Dx_1+Ex_2+Bx_3)-h(t,x_1,x_2)(Dx_1+Ex_2+Ax_4)\\&-\varphi(t,x_1)(Dx_1+Bx_3+Ax_4)rp_1(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2).\end{aligned}$$

其中 $r=\sqrt{A^2+B^2+E^2+D^2}$，又由条件 2)知

$$-D\varphi(t,x_1)x_1=-D\frac{\varphi(t,x_1)}{x_1}x_1^2\leqslant -Dex_1^2\ (x_1\neq 0),$$

$$-f(t,x_1,x_2,x_3)Ax_4^2+Bx_4^2\leqslant(-Aa+B)x_4^2=-Dx_4^2,$$

因此，

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}\leqslant &-Dex_1^2-Dex_2^2-Dx_3^2-Dx_4^2-D[h(t,x_1,x_2)-cx_2]x_1\\
&-D[g(t,x_1,x_2,x_3)-bx_3]x_1-D[f(t,x_1,x_2,x_3)-a]x_1x_4\\
&-E[g(t,x_1,x_2,x_3)-bx_3]x_2-E[f(t,x_1,x_2,x_3)-a]x_2x_4\\
&-B[\varphi(t,x_1)-ex_1]x_3-A[\varphi(t,x_1)-ex_1]x_4-A[h(t,x_1,x_2)-cx_2]x_4\\
&+rp_1(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)\\
=&-\frac{De}{4}\left[x_1+\frac{2}{e}(h(t,x_1,x_2)-cx_2)\right]^2+\frac{D}{e}[h(t,x_1,x_2)-cx_2]^2\\
&-\frac{De}{4}[x_1+\frac{2}{e}(g(t,x_1,x_2,x_3)-bx_3)]^2+\frac{D}{e}[g(t,x_1,x_2,x_3)-bx_3]^2\\
&-\frac{De}{4}[x_1+\frac{2}{e}(f(t,x_1,x_2,x_3)-a)x_4]^2+\frac{D}{e}[f(t,x_1,x_2,x_3)-a]^2x_4^2-\frac{De}{4}x_1^2\\
&-\frac{De}{4}[x_2+\frac{2E}{eD}(g(t,x_1,x_2,x_3)-bx_3)]^2+\frac{E^2}{eD}[g(t,x_1,x_2,x_3)-bx_3]^2\\
&-\frac{De}{4}[x_2+\frac{2E}{eD}(f(t,x_1,x_2,x_3)-a)x_4]^2+\frac{E^2}{eD}[f(t,x_1,x_2,x_3)-a]^2x_4^2\\
&-\frac{De}{2}x_2^2-\frac{D}{4}[x_3+\frac{2B}{D}(\varphi(t,x_1)-ex_1)]^2+\frac{B^2}{D}[\varphi(t,x_1)-ex_1]^2-\frac{3}{4}Dx_3^2\\
&-\frac{D}{4}[x_4+\frac{2A}{D}(\varphi(t,x_1)-ex_1)]^2+\frac{A^2}{D}[\varphi(t,x_1)-ex_1]^2\\
&-\frac{D}{4}[x_4+\frac{2A}{D}(h(t,x_1,x_2)-cx_2)]^2+\frac{A^2}{D}[h(t,x_1,x_2)-cx_2]^2-\frac{D}{2}x_4^2\\
&+rp_1(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2).\end{aligned}$$

由于条件2)知

$$(f(t,x_1,x_2,x_3)-a)^2\leqslant\frac{D^2\delta^2e^2}{2(D^2+E^2)},$$

$$(g(t,x_1,x_2,x_3)-bx_3)^2=\left(\frac{g(t,x_1,x_2,x_3)}{x_3}-b\right)^2x_3^2\quad(x_3\neq 0)$$

$$\leqslant\frac{3D^2\delta^2e^2}{4(D^2+E^2)}x_3^2,$$

$$(h(t,x_1,x_2)-cx_2)^2=\left(\frac{h(t,x_1,x_2)}{x_2}-c\right)^2x_2^2\qquad(x_2\neq 0)$$

$$\leqslant\frac{D^2\delta^2e^2}{2(eA^2+D^2)}x_2^2,$$

$$(\varphi(t,x_1)-ex_1)^2=\left(\frac{\varphi(t,x_1)}{x_1}-e\right)^2x_1^2\leqslant\frac{D^2\delta^2e}{4(A^2+B^2)}x_1^2\ (x_1\neq 0),$$

因此，

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt}\leqslant &-\frac{De}{4}x_1^2+\left(\frac{B^2}{D}+\frac{A^2}{D}\right)\frac{D^2\delta^2e}{4(A^2+B^2)}x_1^2-\frac{De}{2}x_2^2\\
&+\left(\frac{D}{e}+\frac{A^2}{D}\right)\frac{D^2\delta^2e^2}{2(eA^2+D^2)}x_2^2-\frac{3}{4}Dx_3^2+\left(\frac{D}{e}+\frac{E^2}{eD}\right)\frac{3D^2\delta^2e}{4(D^2+E^2)}x_3^2-\frac{D}{2}x_4^2\\
&+\left(\frac{D}{e}+\frac{E^2}{eD}\right)\frac{D^2\delta^2e}{2(D^2+E^2)}x_4^2+rp_1(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)\\
=&-\frac{D}{4}(1-\delta^2)(ex_1^2+2ex_2^2+3x_3^2+2x_4^2)+rp_1(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2).\end{aligned}\tag{3}$$

现在来证明$V(t,x_1,x_2,x_3,x_4)$是具有无限大下限和无穷小上界的正定函数，为此，对$V(t,x_1,x_2,x_3,x_4)$中不含积分的那部分二次型进行配方(见文[5])，我们得到

$$
\begin{aligned}
V(t,x_1,x_2,x_3,x_4) &= \frac{D}{2c}(cx_1+bx_2+ax_3+x_4)^2+\frac{e}{2c}[(ab-c)x_2+a^2x_3-ax_4]^2 \\
&+\frac{e}{2a}[(ab-c)x_1+a^2x_2+ax_3]^2+\frac{ae}{2}[x_4+ax_3+\frac{ab-c}{a}x_2]^2 \\
&+\frac{ce}{2}[x_3+ax_2+\frac{ae}{c}x_1]^2+\frac{a}{2}(ex_1+cx_2+\frac{c}{a}x_3)^2+\frac{De}{2c}(ex_1^2+x_2^2+x_3^2) \\
&+\frac{D}{2a}(ex_1^2+ex_2^2+x_3^2+x_4^2)+E\int_0^{x_1}[\varphi(t,\xi)-e\xi]d\xi+B\int_0^{x_1}[h(t,x_1,\xi)-c\xi]d\xi \\
&+A\int_0^{x_3}[g(t,x_1,x_2,\xi)-b\xi]d\xi+B\int_0^{x_4}[f(t,x_1,x_2,\xi)-a]\xi d\xi.
\end{aligned}
$$

由于条件2)知

$$0\leqslant\int_0^{x_1}[\varphi(t,\xi)-e\xi]d\xi=\int_0^{x_1}\left[\frac{\varphi(t,\xi)}{\xi}-e\right]\xi d\xi\leqslant\frac{D\delta\sqrt{e}}{4\sqrt{A^2+B^2}}x_1^2,$$

$$0\leqslant\int_0^{x_1}[h(t,x_1,\xi)-c\xi]d\xi=\int_0^{x_1}\left[\frac{h(t,x_1,x_2,\xi)}{\xi}-c\right]\xi d\xi\leqslant\frac{D\delta e}{2\sqrt{2(eA^2+D^2)}}x_2^2,$$

$$0\leqslant\int_0^{x_3}[g(t,x_1,x_2,\xi)-b\xi]d\xi=\int_0^{x_3}\left[\frac{h(t,x_1x_2,,\xi)}{\xi}-b\right]\xi d\xi\leqslant\frac{D\delta\sqrt{3e}}{4\sqrt{D^2+E^2}}x_3^2,$$

$$0\leqslant\int_0^{x_4}[f(t,x_1,x_2,\xi)-a]\xi d\xi\leqslant\frac{D\delta\sqrt{e}}{2\sqrt{2(D^2+E^2)}}x_4^2,$$

因此$V(t,x_1,x_2,x_3,x_4)$是具有无限大下限和无穷小上界的正定函数，于是存在充分小的正数$\varepsilon>0$，使得

$$V(t,x_1,x_2,x_3,x_4)\geqslant\varepsilon(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2),$$

代入(3)式得

$$\frac{dV}{dt}\leqslant-\frac{D}{4}(1-\delta^2)(ex_1^2+2ex_2^2+3x_3^2+2x_4^2)+\frac{r}{\varepsilon}p_1(t)V(t,x_1,x_2,x_3,x_4),$$

若令

$$\xi(x)=\xi(x_1,x_2,x_3,x_4)=-\frac{D}{4}(1-\delta^2)(ex_1^2+2ex_2^2+3x_3^2+2x_4^2)$$

$$q(t)=\frac{r}{\varepsilon}p_1(t),$$

则引理中一切条件均满足，因此系统(2)的零解是全局渐近稳定的，那也就是说，系统(1)的零解是全局渐近稳定的。定理证毕。

参 考 文 献

[1] 梁中超，常微分方程解的全局稳定性，山东大学学报（数理版），1964年第二期.

[2] J. O. C. Ezeilo, On the boundedness and the stability of solutions of some differential equations of the fourth order, *J. of Math. Analysis and Application*, 5(1962) 136—146.

[3] Hara, T., On the asymptotic behavior of solutions of some third and fourth order non-autonomous differntial equations, *Publ RIMS Kyoto Univ*. 9(1974).

[4] 陈绍着，非自治微分方程的稳定性，山东大学学报（数理版），1982年第二期。

[5] 卢亭鹤、沈家骐、金均，四阶方程的 Ляпунов 函数的作法与应用，上海师范学院学报（自然科学版），1982年第二期.