第5卷 第4期
1985年10月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.4
Oct. 1985

关于加边矩阵的奇异性问题的注记*

庄瓦金

（南平师专）

在文[1]的基础上，这篇注记给出了$m\times m$复矩阵A的一类非奇异加边矩阵的特征，得到了利用这种加边矩阵的逆阵的子块求全体（1，2）-逆与Moore—Penrose逆所关联的两个定理。

本文约定：$C^{m\times n}$表示$m\times n$复矩阵的集合，$C_r^{m\times n}$表示$C^{m\times n}$的秩r的矩阵的子集，设$A\in C^{m\times n}$，通常把Penrose方程

$$AXA=A \tag{1}$$

$$XAX=X \tag{2}$$

$$(AX)^*=AX \tag{3}$$

$$(XA)^*=XA \tag{4}$$

的唯一解[2]X叫做A的Moore—Penrose逆，记作A^+。满足Penrose方程中的第（i）个，…第（j）个X叫做A的（$i,\cdots,j$）-逆，记作$A^{(i,\cdots,j)}$；所有$A^{(i,\cdots,j)}$的集合记作$A\{i,\cdots,j\}$。

继续考察[1]中的定理1，我们得到一类非奇异加边矩阵的如下特征：

定理1 设$A\in C_r^{m\times n}$，它的$n+k$阶加边矩阵

$$M=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n & k \end{array} \\ & \begin{pmatrix} A & B \\ C & O \end{pmatrix}\begin{array}{l} m \\ \\ \end{array} \end{array}, \tag{5}$$

其中$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$与$B$都是满列秩的，（$A$，$B$）与$C$都是满行秩的，那么以下陈述是彼此等价的：

(i) M非奇异，且

$$M^{-1}=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} m & \end{array} \\ & \begin{pmatrix} P & Q \\ S & O \end{pmatrix}\begin{array}{l} n \\ k \end{array} \end{array}. \tag{6}$$

(ii) $m=k+r$.

(iii) $R(A)\cap R(B)=\{\theta\}$，这里$R(G)$表示矩阵G的值域，θ表示列的零向量.

(iv) $R(A')\cap R(C')=\{\theta\}$.

由[1]的定理2知道，若A满足定理1四陈述之一，则$P\in A\{1,2\}$，因而由[3]中第四章的定理11，可以求得$A\{1\}$。考虑全体（1,2）-逆，我们证得

定理2 设$A\in C^{m\times n}$，$A^{(1)}\in A\{1\}$，则

$$A\{1,2\}=\{[A^{(1)}+(I_n-A^{(1)}A)V]A[A^{(1)}+W(I_m-AA^{(1)})]\mid V,W\in \mathbf{C}^{n\times m}\}, \tag{7}$$

这里I_t表示t阶单位阵.

因此，对于满足定理1四陈述之一的矩阵(5)，还可由其逆的子块P求得$A\{1,2\}$。

* 1983年1月17日收到.

最后考虑求 A^+ 的加边矩阵法，我们证得

定理 3 设A的非奇异加边矩阵M及逆阵M^{-1}如定理1，则$P=A^+$ 的充分且必要条件是$S\in B\{3\}$与$Q\in C\{4\}$.

因此，要由A的加边矩阵的逆阵的子块求得A^+，据定理3，关键在于选择 B，C. 我们提供试选 B，C 的一种做法. 注意到 B 满列秩，可设

$$B=B_1\begin{pmatrix}I_k\\O\end{pmatrix},\ B_1 \text{ 是一个 } m \text{ 阶非奇异矩阵.} \qquad (8)$$

又由 $SB=I_k$ 得$S\in B\{1,\ 2\}$. 因此，由[4]可设

$$S=(I_k,\ X)B_1^{-1},\ X\in \mathbf{C}^{k\times(m-k)}.$$

这样，要使BS是 Hermite 的，注意到$SA=0$，可考虑在(8)中试选一个m阶酉矩阵 B_1，使得

$$B_1^*A=\begin{pmatrix}0\\A_1\end{pmatrix},\ A_1\in\mathbf{C}^{r\times n}.$$

类似地，对于$C=(I_l,\ O)C_1$，$l=n+k-m$. 可考虑试选一个 n 阶酉矩阵 C_1，使得

$$AC_1^*=(0,\ A_2),\ A_2\in\mathbf{C}^{m\times r}.$$

将此做法试用于矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}$，取

$$B=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt 2}&-\frac{1}{\sqrt 2}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt 2}&\frac{1}{\sqrt 2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt 2}\\1&0\\0&\frac{1}{\sqrt 2}\end{pmatrix},\ C=(1,0)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt 2}&\frac{}{\sqrt 2}\\\frac{1}{\sqrt 2}&\frac{1}{\sqrt 2}\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{\sqrt 2},\frac{1}{\sqrt 2}\right),$$

求$M=\begin{pmatrix}A&B\\C&O\end{pmatrix}$的逆阵，从其子块得

$$A^{(1,2)}=\begin{pmatrix}\frac14&0&-\frac14\\-\frac14&0&\frac14\end{pmatrix}=A^+.$$

参 考 文 献

[1] 程志斌，$A_{m\times n}$矩阵的加边矩阵的奇异性问题，数学研究与评论，3(1982)，19—22.

[2] Penrose, R., A generalized inverre for matrices, *Pros. Camb. Philos. Soc.* 51:406—413(1955).

[3] 南京大学数学系计算数学专业，线性代数，科学出版社，1978.

[3] 吴文达，广义逆矩阵，计算机应用与应用数学，1(1974)，4—23.

A Note on Singularity of Bordered Matrix

Zhuang Wajin

Abstract

On the basis of the paper [1], we give the characterizations of the nonsingular bordered matrices of one class for an $m\times n$ complex matrix A, and obtain two theorems associated with finding $A\{1,2\}$ and A^+ by a subblock of inverse matrix of such a bordered matrix.