第5卷 第4期　1985年10月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.5 No.4　Oct. 1985

(0,1)-矩阵类$\mathfrak{A}(R,S)$的基数函数$f(R,S)$及其非零集*

万宏辉

（华中工学院数学系）

Gale[1]和Ryser[2]曾独立地得到了(0, 1)-矩阵类$\mathfrak{A}(R, S)$非空的充要条件。然而，正如Ryser[3][4]所宣称的，$\mathfrak{A}(R, S)$的基数$f(R, S)$是R与S的一个极端复杂的函数，确定$f(R, S)$的值是一个远为困难的问题。魏万迪[5]给出了$|\mathfrak{A}(R, S)|$的一个下界，接着我们在文[6]中研究了$\mathfrak{A}(R, S)$的结构与基数，并得到了比[5]更好的$|\mathfrak{A}(R, S)|$的下界。本文先研究$f(R, S)$的非零集的结构与基数，然后研究$f(R, S)$的递减性，并求出它的极值点。本文所用的术语和记号，除另有说明外，均见文献[2]～[6]。本文所提及的向量均指分量为非负整数的向量，矩阵均指(0, 1)-矩阵。

给定向量$\bar{R}=(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \cdots, \bar{r}_m)$，为于便讨论，设$\bar{R}$是递降的。设$\bar{A}$是$m\times n$的极左上矩阵，其行和向为$\bar{R}$，列和向量为$\bar{S}$，[5]中定理1给出了$\bar{S}$的计算公式。

定义 1　令

$$L(\bar{S}):=\{S\,|\,S\prec\bar{S},\ S\text{递降}\},$$
$$f(\bar{R}, \bar{S}):=|\mathfrak{A}(\bar{R}, S)|,$$

我们称$L(\bar{S})$为S的下方集，称$f(\bar{R}, S)$为$\mathfrak{A}(\bar{R}, S)$的基数函数。根据Gale—Ryser定理[1][2]知，当且仅当$S\in L(\bar{S})$时，$f(\bar{R}, S)>0$，故我们又称$L(\bar{S})$为$f(\bar{R}, S)$的非零集。

定义 2　设$S=(s_1, s_2, \cdots, s_n)$为一向量，令

$$\tau_i=\sum_{k=1}^{i} s_k \qquad (1\leqslant i\leqslant n),$$

则称$T=(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n)$为$S$的部分和向量。

关于$L(\bar{S})$的结构，我们有

定理 1　$L(\bar{S})$是一个分配格，且有最小元$\underline{S}=(\underline{s}_1, \underline{s}_2, \cdots, \underline{s}_n)$，其中$\underline{s}_i=a+1$，$1\leqslant i\leqslant b$，$\underline{s}_j=a$，$b<j\leqslant n$，

$$a=\left[\frac{\sum_{k=1}^{n}\bar{s}_k}{n}\right], \qquad b=\sum_{k=1}^{n}\bar{s}_k-na,\ 0\leqslant b<a.$$

这里$[x]$表示x的整数部分。设S', $S''\in L(\bar{S})$，它们的部分和向量分别为

$$\tau'=(\tau_1', \tau_2', \cdots, \tau_n'),\ \tau''=(\tau_1'', \tau_2'', \cdots, \tau_n''),$$

*1982年10月10日收到。

令 $\dot{\tau}_i=\max(\tau_i', \tau_i'')$, $\underset{\cdot}{\tau}_i=\min(\tau_i', \tau_i'')$, 则

$\dot{S}=(\dot{\tau}_1, \dot{\tau}_2-\dot{\tau}_1, \cdots \dot{\tau}_n-\dot{\tau}_{n-1})$

$\underset{\cdot}{S}(\underset{\cdot}{\tau}_1, \underset{\cdot}{\tau}_2-\underset{\cdot}{\tau}_1, \cdots, \underset{\cdot}{\tau}_n-\underset{\cdot}{\tau}_{n-1})$

分别为S'与S''的上、下确界。

我们利用一些不等式就可证明上述定理。

设$S\in L(\bar{S})$，而$\hat{A}$为极左上矩阵，其列和向量为S，行和向量为$R=(r_1, r_2, \cdots, r_m)$，则$R$由

$$\varphi:\ r_j=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\mathrm{sgn}\left[\ \max(s_i-j+1,\ 0)\ \right]=\max\{i\,|\,s_i\geqslant j\}\quad(1\leqslant j\leqslant m)$$

唯一确定。我们有

定理 2 设$\bar{R}=\varphi(\bar{S})$，$\underline{R}=\varphi(\underline{S})$，$\mathrm{L}(\bar{R}\,|\,\underline{R})=\{\mathrm{R}\,|\,\bar{R}\prec\mathrm{R}\prec\underline{R},\ \mathrm{R}$递降$\}$则$\varphi(L(\bar{S}))=L(\bar{R}\,|\,\underline{R})$，$(L(\bar{S}),\ \prec)$与$(L(\bar{R}\,|\,\underline{R}),\ \succ)$关于$\varphi$是格同构的。

设$\bar{T}=(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2, \cdots, \bar{\tau}_n)$为$\bar{S}$的部分和向量，令

$$P(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2, \cdots, \bar{\tau}_n)\equiv P(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \cdots, \bar{s}_n):=|L(\bar{S})|,$$

这为$\bar{\tau}_n$的一种有限制的分拆数。下述定理 3 提供了计算它的递推公式。

定理 3 设$\bar{S}=(\underline{s}_1, \underline{s}_2\cdots, \underline{s}_n)$为$\mathrm{L}(\bar{S})$的最小元，则

$$P(\bar{\tau}_1, \cdots, \bar{\tau}_n)=\sum_{i=0}^{\bar{s}_1-\underline{s}_1}P(\min(\bar{s}_1-i,\ \bar{s}_2+i),\ \bar{\tau}_3-\bar{\tau}_1+i,\ \cdots,\ \bar{\tau}_m-\bar{\tau}_1+i)$$

$$=\sum_{i=0}^{\underline{s}_n-\bar{s}_n}P(\bar{\tau}_1, \cdots, \bar{\tau}_{n-3},\ \min(\bar{\tau}_{n-2}, \bar{\tau}_{n-1}-\bar{s}_n-2i), \bar{\tau}_{n-1}-i),$$

特别地，

$$P(\tau,\ \tau,\ \cdots\tau)=P(\tau,\ 0,\ \cdots,\ 0)=P_\tau^{[n]},$$

这里$P_\tau^{[n]}$是τ的分部数不超过n的无序分拆数。

现在我们转而考虑$\mathfrak{A}(\bar{R},\ S)$的基数函数$f(\bar{R},\ S)$。

定理 4 设

$S'=(s_1', s_2', \cdots, s_n')\in L(\bar{S})$,

$S''=(s_1', \cdots, s_{p-1}', s_p'-d, s_{p+1}', \cdots, s_{q-1}', s_q'+d, s_{q+1}', \cdots, s_n')\in L(\bar{S})$

又设S'与$\bar{S}$的分解列为$\{S'_{(i_{j-1}, i_j]}\}_{1\leqslant j\leqslant h}$与$\{\bar{S}_{(i_{j-1}, i_j]}\}_{1\leqslant j\leqslant k}$（定义见[6]）。若$p\in(i_{h-1},\ i_h]$，$q\in(i_{l-1},\ i_l]$，而$h<l$， 令

$$\sigma(S'',\ S')=\omega^*+\sum_{\eta\in(i_h, i_{l-1}]}\omega_\eta^*\ ,$$

$$\omega^*=\binom{s_p'-s_q'}{d},\qquad 当\eta\in(i_{\xi-1},\ i_\xi]\ 时$$

$$\omega_\eta^*=\binom{s_p'-s_\eta'}{d}\binom{s_\eta'-s_p'+d}{d}-\sum_{\mu=0}^{d}\binom{s_p'-\bar{s}_{i_{\xi-1}+1}+1}{\mu}\binom{\bar{s}_{i_{\xi-1}+1}-s_\eta'}{d-\mu}\binom{s_\eta'-s_p'+d-\mu}{d-\mu},$$

$\xi=h+1, \cdots, l-1.$ 则

$$f(\bar{R},\ S'')\geqslant\sigma(S'',\ S')\cdot f(\bar{R},\ S')\geqslant\binom{2d}{d}f(\bar{R},\ S').$$

若p，$q\in(i_{u-1},\ i_u]$， 令

$$a=\min(\bar{s}_{i_u}, s'_p+s'_q-\bar{s}_v),\quad v=i_{u-1}+1,$$

$$\pi(S'', S')=\binom{s'_p+s'_q-2a}{s'_q-a+d}\Big/\binom{s'_p+s'_q-2a}{s'_q-a},$$

则

$$f(\bar{R}, S'')\geqslant\pi(S'', S')f(\bar{R}, S').$$

由定理 4 立即得到

理定 5　（递减性）设S'，$S''\in L(\bar{S})$，$S''\prec S'$，　则

$$f(\bar{R}, S')\leqslant f(\bar{R}, S''),$$

等号当且仅当$S''=S'$时成立.

利用定理 5 可得

定理 6　设$\underline{S}$为$L(\bar{S})$的最小元，则

$$f(\bar{R}, \underline{S})=\max_{S\in L(\bar{S})}f(\bar{R}, S),\qquad f(\bar{R}, \bar{S})=\min_{S\in L(\bar{S})}f(\bar{R}, S)=1,$$

而且最大值点和最小值点均是唯一的.

在一般情况下，$f(\bar{R}, S)$的最大值是不易求得的，但当$n\geqslant\tilde{\tau}_n=\sum_{i=1}^{n}\bar{s}_i$时，易得

$$f(\bar{R}, \underline{S})=\binom{\tilde{\tau}}{r_1, r_2, \cdots, r_m},$$

这时

$$\underline{S}=(\underbrace{1,\cdots,1,}_{\tilde{\tau}_n}\underbrace{0,\cdots,0,}_{n-\tilde{\tau}_n})$$

设τ为一正整数，　令

$$L(R^\tau):=\left\{R=(r_1, \cdots, r_m)\,\middle|\,\sum_{i=1}^{m}r_i=\tau,\ r_1\geqslant\cdots\geqslant r_m\right\},$$

$$L(S^\tau):=\left\{S=(s_1, \cdots, s_n)\,\middle|\,\sum_{i=1}^{n}s_i=\tau,\ s_1\geqslant\cdots\geqslant s_n\right\}.$$

由定理 1 知$L(R^\tau)$和$L(S^\tau)$对偏序“$\prec$”均构成格，它们的最大元分别为$R^\tau=(\tau, 0, \cdots, 0)$和$S^\tau=(\tau, 0, \cdots, 0)$，且可求得它们的最小元$R_\tau$和$S_\tau$.　令

$L(R^\tau, S^\tau):=L(R^\tau)\times L(S^\tau)$，关系“$\prec$”定义为

$L(R'', S'')\prec(R', S')$，R'，$R''\in L(R^\tau)$，S'，$S''\in L(S^\tau)$，

意指

$R''\prec R'$，$S''\prec S'$.

则$L(R^\tau, S^\tau)$是个格，且有最小元(R_τ, S_τ).

定义 3　令

$$f(R, S):=|\mathfrak{A}(R, S)|,\ (R, S)\in L(R^\tau, S^\tau),$$

我们称$f(R, S)$为(0, 1)-矩阵类$\mathfrak{A}(R, S)$的基数函数.

显然，对固定的$R\in L(R^\tau)$，设$\bar{A}$是以R为行和向量的极左矩阵，而S^*是$\bar{A}$的列和向量，则当且仅当$S\prec S^*$时，$f(R, S)\geqslant1$. 对固定的$S\in L(S^\tau)$，设$\bar{A}$是以S为列和向量的极左矩阵，其行和向量为R^*，则当且仅当$R\prec R^*$时，$f(R, S)\geqslant1$.

由定理5、6即得

定理7 基数函数$f(R,S)$分别对R与S递减，即：当$R''\prec R'$时，$f(R'',S)\geqslant f(R',S)$；当$S''\prec S'$时$f(R,\ S'')\geqslant f(R,\ S')$.

定理8 基数函数$f(R,\ S)$有唯一的最大值点：$(R_\tau,\ S_\tau)$，这里R_τ和S_τ分别为$L(R^\tau)$与$L(S^\tau)$的最小元.

给定递降向量R,亦有以此为行和向量的极左上矩阵$\bar{A}$,以及$\bar{A}$的列和向量$\bar{S}$,对$S\in L(\bar{S})$，把S分成若干段，使得每一段全由相同的元素组成，而相邻的段的元素是不相同的，每一个这样的段叫作S的一个连贯.现设S的诸连贯之长度(即元素的个数)分别为l_1，l_2，…，l_λ，

令 $$K(R,\ S)=\binom{n}{l_1,l_2,\cdots,l_\lambda}$$，则有下列定理.

定理9 $$\prod_{i=1}^{m}\binom{n}{r_i}=\sum_{S\prec\bar{S}}f(R,\ S)=\sum_{S\in L(\bar{S})}K(R,\ S)f(R,\ S).$$

若给定列和向量，亦有类似的结论.

参考文献

[1] Gale, D., A theorem on flows in networks, *Pacific J. Math.*, 7(1957), 1073—1082.

[2] Ryser, H. J., Combinatorial properties of matrices of zeros and ones, *Canad. J. Math.*, 9(1957), 371—377.

[3] Ryser, H. J., Matrices of zeros and ones, *Bull. Amer. Math.Soc.*, 66(1960), 442—464.

[4] Ryser, H. J., Combinatorial mathematics, *Carus Math. Monographs*, No. 14, 1963.

[5] 魏万迪，(0，1)-矩阵类$\mathfrak{A}(R,\ S)$，科学通报（数理化专辑），第一集(1980)，21—23.

[6] 万宏辉，(0，1)-矩阵类$\mathfrak{A}(R,S)$的结构和基数，数学研究与评论，第四卷，(1984) 第一期，p,87.

Cardinal Function f(R S) of the Class $\mathfrak{A}$(R S) of(0,1)-Matrices and its Nonzero-point Set

Wan Honghui

(Huazhong University of Science and Technology)

Let R and S be two vectors with m and n nonnegative integers as conponents, respectively. Let $\mathfrak{A}$ (R,S) be the class consisting of all $m\times n$ $(0,1)$-matrices with row sum vector R and column sum vector S. Suppose that $\bar{A}$ is the maximal mrixat with row sum vector R. Let $\bar{S}$ he the column sum vector of $\bar{A}$. (cf. H. J. Ryser, Combinatorial Mathematics, Carcus Math. Monograph 14 (1963)). Let $L(\bar{S})=\{S=(s_1,\cdots,s_m),\ S\prec\bar{S},\ s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant s_n\}$, and let $f(R,S)$ be the cardinal function of $\mathfrak{A}$ (R,S), i. e.. $f(R,S)=|\mathfrak{A}(R,S)|$. Then $L(\bar{S})$ is the nonzero-point set of $f(R,S)$. In this paper our principal result is the following.

Theorem 1 Let S^* and $S^*\in L(\bar{S})$ with $S^{**}\prec S^*$. Then

$$f(R,S^{**})\geqslant H(S^{**},S^*)\cdot f(R,S^*),$$

$$f(R,\underline{S})=\max_{S\in L(\bar{S})}f(R,S),\qquad f(R,\bar{S})=\min_{S\in L(\bar{S})}f(R,S)=1,$$

where $H(S^{**},\ S^*)$ is a positive integr determined uniquely by S^* and S^{**}, and $\underline{S}$ is the minmum element in $L(\bar{S})$.