第5卷 第4期 数学研究与评论 Yol.5 No.4
1985年10月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Oct. 1985

关于在连续闭映射下的原象*

陈必胜

(苏州大学数学系)

§1、引 言

讨论拓扑性质在映射下的过渡问题是一般拓扑学研究的课题之一．例如，设 f 是从空间 X 到空间 Y $(=f(X))$ 上的连续闭映射，许多作者证明，当X具有某些复盖性质$\mathscr{P}$时，Y 也具有性质$\mathscr{P}$；反之，如果假设f还满足条件：

(*) 对每一$y\in Y$，$f^{-1}(y)$：是X的紧子集，则当Y具有某些复盖性质$\mathscr{P}$时，X也具有性质$\mathscr{P}$．满足条件(*)的连续闭映射通常称为完备映射．然而不难发现，在连续闭映射下，当Y具有某些复盖性质$\mathscr{P}$时，为使X具有$\mathscr{P}$，条件(*)只是一个充分条件，不是必要的．本文的目的就是从减弱条件(*)着手，给出在连续闭映射下为使原象空间也具有某些复盖性质的充分必要条件．

先叙述本文用到的几个主要概念．空间X的子集族称为在X中是局部有限（或紧有限，按点有限）的，如果对每一$x\in X$都有一个邻域U_x（或每个紧集K，每点x）至多只与$\mathscr{U}$中有限多个元素相交．空间X称为仿紧（或紧式仿紧，弱仿紧）的，如果X的任一开复盖有局部有限（或紧有限，按点有限）的开加细．Aull[1]定义了α-仿紧子集，仿照[1]我们可定义α-紧式仿紧子集与α-弱仿紧子集的概念如下：

定义1 空间X的子集A称为α-仿紧（或α-紧式仿紧，α-弱仿紧）子集，如果对于由X中开集组成的A的任一复盖$\mathscr{U}$，存在X中开集族$\mathscr{V}$复盖A，加细$\mathscr{U}$，且$\mathscr{V}$在X中是局部有限（或紧有限，按点有限）的．

本文中，所有的映射都假设是满的，对于各类拓扑空间，除特别声明的外，不假设任何分离公理，但正规空间总假设是T_1的．此外，我们用$\mathscr{G}^*$表示集族$\mathscr{G}$中所有元素的并集．

§2. 主要结果

定理1 设f：$X\to Y$是连续闭映射．若Y是仿紧空间，且对每一$y\in Y$，$f^{-1}(y)$是X的α-仿紧子集，则X是仿紧空间．

证明 设$\mathscr{U}=\{U_\alpha;\alpha\in A\}$是$X$的任一开复盖．对每一$y\in Y$，$\mathscr{U}$也复盖$f^{-1}(y)$，由$f^{-1}(y)$的$\alpha$-仿紧性，存在$X$中开集族$\mathscr{V}_y$复盖$f^{-1}(y)$，加细$\mathscr{U}$，且$\mathscr{V}_y$在$X$中局部有限．令$E_y=X-f^{-1}(f(X-v_y^*))$，容易证明$E_y$是$X$中开集，并且$f^{-1}(y)\subseteq E_y\subseteq v_y^*$，$E_y=f^{-1}f(E_y)$以及$W_y=f(E_y)$是$y$中包含点$y$的开集．于是，$\mathscr{W}=\{W_y;\ y\in Y\}$是$Y$的开复盖，由$Y$的仿紧性，存在局部有限的开加细$\mathscr{O}=\{O_\gamma;\ \gamma\in\Gamma\}$．对每一$\gamma\in\Gamma$，取定$\mathscr{W}$中包含$O_\gamma$的一个开集为$W_{y(\gamma)}$，并令

$$\mathscr{G}_\gamma=\{f^{-1}(O_\gamma)\cap V;\ V\in\mathscr{V}_{y(\gamma)}\}\text{及}\mathscr{G}=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\mathscr{G}_\gamma.$$

易知$\mathscr{G}$是X的开复盖，加细$\mathscr{U}$．并且对于每一$x\in X$，设$y=f(x)$，一方面因为$\mathscr{O}$在Y中局部有限，故存在Y的开邻域G_y至多只与$\mathscr{O}$中有限多个元素O_{γ_1}，O_{γ_2}，…，O_{γ_n}相交，从而点x的邻域$H_y=f^{-1}(G_y)$至多只与有限多个$f^{-1}(O_{\gamma_1})$，$f^{-1}(O_{\gamma_2})$，…，$f^{-1}(O_{\gamma_n})$相交；另一方面，对每一$i\in\{1,2,\cdots,n\}$，$\mathscr{V}_{y(\gamma_i)}$的局部有限性知存在$x$的开邻域$H_i$至多只与$\mathscr{V}_{y(\gamma_i)}$中有限多个元素相交．令$H=H_y\cap(\bigcap_{i=1}^n H_i)$，它仍是$x$的邻域，且至多只与$\mathscr{G}$中有限多个元素相交，即$\mathscr{G}$在$X$中是局部有限的．所以，$X$的仿紧空间．证毕．

*1983年5月20日收到．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

类似地可以证明下列两个定理：

定理2 设f：$X\to Y$是连续闭映射．若Y是紧式仿紧空间，且对每一$y\in Y$，$f^{-1}(y)$是X的α-紧式仿紧子集，则X是紧式仿紧空间．

定理3 设f：$X\to Y$是连续闭映射．若Y是弱仿紧空间，且对每一$y\in Y$，$f^{-1}(y)$是X的α-弱仿紧子集，则X是弱仿紧空间．

由于紧子集⇒α-仿紧子集⇒α-紧式仿紧子集⇒α-弱仿紧子集，故有下列推论：

推论 设f：$X\to Y$是完备映射，那末，若Y是仿紧（或紧式仿紧，弱仿紧）空间，则X是仿紧（或紧式仿紧，弱仿紧）空间．（看Burke[2]和高国士[3]）．

对于可数仿紧空间、仿Lindelöf空间等，有类似于上述定理的结果，不再一一叙述．

由于Michael[4]证明了Hausdorff仿紧空间在连续闭映射下的象是Hausdorff仿紧空间，高国士和吴利生[5]证明了正规紧式仿紧性在连续闭映射下保持，以及Worrell[6]证明了连续闭映射保持弱仿紧性，而且由于易证仿紧（或紧式仿紧，弱仿紧）空间的闭子集是α-仿紧（或α-紧式仿紧，α-弱仿紧）子集，于是从定理1、2和3即得下列是理4、5和6，它们分别给出了为使原象空间保持上述诸复盖性质的充分必要条件．

定理4 设X是Hausdorff空间，f：$X\to Y$是连续闭映射．为使X是仿紧空间，充要条件是：Y是仿紧空间，且对每一$y\in Y$，$f^{-1}(y)$是X的α-仿紧子集．

定理5．设X是正规空间，f：$X\to Y$是连续闭映射．为使X是紧式仿紧空间，充要条件是：Y是紧式仿紧空间，且对每一$y\in Y$，$f^{-1}(y)$是X的紧式仿紧子集．

定理6 设X是T_1-空间，f;$X\to Y$是连续闭映射．为使X是弱仿紧空闭，充要条件是：Y是弱仿紧空间，且对每一$y\in Y$，$f^{-1}(y)$是X的α-弱仿紧子集．

§3．两个例子

容易看出，空间X的α-仿紧（或α-紧式仿紧，α-弱仿紧）子集作为X的子空间一定是仿紧（或紧式仿紧，弱仿紧）的．但是下面的例1说明反之不然．

例1 设X是Niemytzki的相切圆盘拓扑空间（看[7]，Ex.82）．令M是x轴上全体点所成的集合，易知M是X的离散子空间，从而是仿紧子空间，然而M甚至不是X的α-弱仿紧子集．事实上，对每一$p=(x, 0)\in M$，取U_p是平面上以点$p'=(x, 1)$为圆心以1为半径的开圆与$\{p\}$的并集，则$\mathscr{U}=\{Up: p\in M\}$是$X$中开集族，复盖$M$，然而不难证明，对于$X$中任一开集族$\mathscr{V}$，若$\mathscr{V}$也复盖$M$且加细$\mathscr{U}$，则$\mathscr{V}$在$X$中不可能是按点有限的．

下面的例2说明，如果将定理3中有关条件减弱为：“对每一$y\in Y$，$f^{-1}(y)$是X的弱仿紧子空间”，则X不必是弱仿紧空间．

例2 X与M的定义见例1，并取Y为商空间X/M．由于M是X的闭子集，商映射f：$X\to Y$是连续闭映射；而且对每一$y\in Y$，$f^{-1}(y)$或者是单点集，或者是M，都是X的仿紧子空间．由例1知，M不是X的α-弱仿紧子集．易证Y是弱仿紧空间，但如[7]所述，X不是弱仿紧空间．

感谢高国士、吴利生老师对本文的帮助．

参 考 文 献

[1] Aull, C. E., Paracompact subsets, Proceeding of the Second Pragul Symposium, (1966), 45—51.

[2] Burke. D. K., Closed mappings, Surveys in General Topology, Academic Press, Inc., (1980).

[3] 高国士，仿紧性与完备映象，数学学报，23(1980)，794-796.

[4] Michael, E., Another note on paracompactspacts spaces, *Proc. Amer. Math.* Soc.,8(1957),822—828.

[5] Gao G. S., Wu,L.S., Mapping theorems on mesocompact spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 89(1983).

[6] Worrell, J. M., The closed images of metacompact topological spaces, *Portugal Math.*. 25 (1966), 175—179.

[7] Steen, L. A.& Seebach, J. A., Counterexamples in Topology, Springer-Verlay,(1978, 100—103.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.