第5卷 第4期
1985年10月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.4
Oct. 1985

一类拟线性椭圆方程组的Dirichlet问题*

严子谦

（吉林大学）

考虑如下拟线性椭圆方程组的Dirichlet问题:

$$\begin{cases}[a_{i\,j}^{l\,m}(x,u)u^j_{,m}+b_i^l(x,u)]=f_i(x,u,Du),\ x\in\Omega,\\ u^i|_{\partial\Omega}=0,\qquad i=1,\cdots,N.\end{cases}\tag{1}$$

这里，Ω是n维有界光滑域，$x=(x_1,\cdots,x_n)$，$u=(u^1,\cdots,u^N)$，$Du=(Du^1,\cdots,Du^N)$，$Du^i=(u^i_{,1},\cdots,u^i_{,n})$，$u^i_{,l}$表示$u^i$关于$x_l$的偏导数，重复指标$i,j\,(l,m)$表示从1到$N\,(n)$求和。在关于$a_{i\,j}^{l\,m}$，$b_i^l$和$f_i$的适当假设下，我们用具有构造性的Galerkin方法获得了问题(1)在$[H_0^1(\Omega)]^N$中广义解的存在性。对于当$i\neq j$时$a_{i\,j}^{l\,m}=0$的情形，我们建立了此种广义解的最大模估计与Hölder连续性。

A. V. Lair[Ann. Mat. Pura Appl., 116(1978)]研究过f_i与Du无关的特殊情形，其存在性证明所费篇幅较多，而且不具有构造性；尤其是在估计最大模和Hölder模时，他要求函数$b_i^l(x,u)$和$f_i(x,u)$关于u的增长阶$r<\min\left\{1,\ \frac{2}{n-2}\right\}$当$n<6$时，$r=\frac{1}{2}$当$n\geqslant6$时。本文对一切$n$都只要求$r<1$。对于$f_i$依赖于$Du$的方程组(1)，其广义解的正则性，似乎研究不多。而关于广义解的微分性质随系数和右端的微分性质之提高而提高，乃是对方程组作进一步研究的重要课题之一。

对方程组的系数和右端我们先作如下假设:

$a_{i\,j}^{l\,m}(x,u)\,b_i^l(x,u)$和$f_i(x,u,p)$关于$x\in\Omega$可测，关于$u\in\boldsymbol{R}^N$和$p\in\boldsymbol{R}^{nN}$连续，　(2)

$$a_{i\,j}^{l\,m}(x,u)\xi_l^i\xi_m^j\geqslant\lambda|\xi|^2,\ \lambda>0\text{为某常数},\tag{3}$$

$$|a(x,u)|=\left\{\sum_{l,m=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{N}[a_{i\,j}^{l\,m}(x,u)]^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\Lambda,\ \Lambda\text{为常数},\tag{4}$$

$$|b(x,u)|=\left\{\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{N}[b_i^l(x,u)]^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\varepsilon|u|+\varphi_1(x),\tag{5}$$

$$|f(x,u,p)|=\left\{\sum_{i=1}^{N}[f_i(x,u,p)]^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\varepsilon(|p|+|u|)+\varphi_2(x),\tag{6}$$

其中常数$\varepsilon>0$适当小，$\varphi_1,\varphi_2\in L_2(\Omega)$。

定理1 在上述假设下，Dirichlet问题(1)在$[H_0^1(\Omega)]^N=\overbrace{H_0^1(\Omega)\times\cdots\times H_0^1(\Omega)}^{N\text{个}}$中所解。

于此，称$u\in[H_0^1(\Omega)]^N$为问题(1)的广义解，是指对任何$v\in[H_0^1(\Omega)]^N$，恒有

$$L(u,v)\equiv\int_\Omega[(a_{i\,j}^{l\,m}(x,u)u^j_{,m}+b_i^l(x,u))v^i_{,l}+f_i(x,u,Du)v^i]dx=0.\tag{7}$$

为证明定理1，我们选定一列渐增的有限维空间$\{E_k\}$，使$\overline{\bigcup E_k}=[H_0^1(\Omega)]^N$。首先在每个$E_k$中求解$L(u_k,v)=0$，$\forall v\in E_k$。然后证明$\{u_k\}$有极限点$u$，而且$u$就是问题(1)的广义解。若解唯一，则每个$u_k$都是近似解。

---

*1983年11月30日收到。

为了讨论问题(1)的广义解的正则性，我们再假设

$$a_{ij}^{lm}=0 \qquad \text{当} i\neq j\text{时}, \tag{8}$$

$$|b_i|^2=\sum_{l=1}^{n}(b_i^l)^2\leqslant c_0|u|^2+\varphi_1^2, \tag{9}$$

$$f_i^2\leqslant c_0(|p^i|^2+|u|^2)+\varphi_2{}^2, \tag{10}$$

其中φ_1，$\varphi_2\in L_q(\Omega)$，$q>n$，$p^i=(p_1^i,\cdots,p_n^i)$是对应于Du^i的n维向量。此后如无求和符号，指标i不论是否重复均不求和，但关于指标j，l，m的求和约定仍然保持。

定理2 在条件(2)，(3)，(8)，(9)，(10)之下，Dirichlet问题(1)在$[H_0^1(\Omega)]^N$中的广义解有界：$\sup\limits_{\Omega}|u|\leqslant c(\|u\|_2+k)$，其中$k=\|\varphi_1\|_q+\|\varphi_2\|_q$，$c=c(n,N,q,\lambda,c_0,\Omega)$。

这个定理的证明源于G. Gilbarg和N. S. Trudinger《Elliptic partial differential equations of second orader》一书中定理8.15的证明方法。为了使此方法适用于方程组，需要略加变通。具体地说，对每个i和$\beta\geqslant1$，我们定义

$$w^i=(u^i)^2+k^2,\quad G(w)=\int_{k^2}^{w}|H'(z)|^2dz,\quad H(z)=\begin{cases}z^\beta-k^{2\beta} & \text{当}k^2\leqslant z<R,\\ R^\beta-k^{2\beta}+\beta R^{\beta-1}(z-R) & \text{当}z>R.\end{cases}$$

容易验证，$G(w)\leqslant wG'(w)$，$w^iw^jG'(w^i)\leqslant(w^i)^2G'(w^i)+(w^j)^2G'(w^j)$。在恒等式(7)中取$v$为这样的向量函数：其第$i$个分量为$G(w^i(x))u^i(x)$，而其余分量为0。利用假设条件和上面指出的事实，对此恒等式各项进行估计，然后对i求和。在进行一系列的估算，并令$R\to\infty$之后，便得$\sum\limits_{i=1}^{N}\|w^i\|_{\beta\bar n}\leqslant(c\beta)^{1/\beta}\sum\limits_{i=1}^{N}\|w^i\|_{\beta\bar q}$，其中$\bar q=\dfrac{2q}{q-2}$，$\bar n=\dfrac{2\hat n}{\hat n-2}$，当$n>2$时$\hat n=2$，而当$n=2$时$2<\hat n<q$。应用$L_p$中插值不等式，进而可得$\sum\limits_{i=1}^{N}\|w^i\|_{\beta\bar n}\leqslant(c\beta)^{\frac{\beta\bar n-1}{\beta^2(\bar n-\bar q)}}\sum\limits_{i=1}^{N}\|w^i\|_1$。再令$\beta\to+\infty$即得定理2的结论。

定理3 在条件(2)—(4)和(8)—(10)之下，问题(1)在$[H_0^1(\Omega)]^N$中的广义解属于$[c^\alpha(\bar\Omega)]^N$，且$|u^i|_{c^\alpha(\bar\Omega)}$和$\alpha$可以通过已知常数和$\sup\limits_{\Omega}|u|$估出。

证明的重点是在恒等式(7)中适当选取v，并应用O. A. Ладыженская和Н. Н. Уральцзва《Линэиейные и нейныеп Каэинейныеуравненэя эллиптическототипа》中第二章§6，7的结果，证明$u^i\in\mathfrak{B}_2(\bar\Omega,\cdots)$类，从而推出结论。

The Dirichlet Problem for a Class of Quasilinear Elliptic Systems

Yan Ziqian

(Jilin Unirersity)

Abstract

The homogeneous Dirichlet problem(1) for quasilinear elliptic system in a bounded domain Ω is investigated in this paper. The existence of generalized solutions in $[H_0^1(\Omega)]^N$ is obtained by using the contructive Galerkin method. For the case of $a_{ij}^{lm}=0$ when $i\neq j$, it is estatablished that such generalized solutions have bounded $[L_\infty(\Omega)]^N$ norm and possess Höleler continuity. Even in the particular case that f_i are independent of Du, our results have improved those of A. V. Lair [Ann. Mat. Pura Appl., 116(1978)], allowing $b_i^l(x,u)$ and $f_i(x,u)$ to have a growth in u arbitrarily close to 1.