1986年3月

数学研究与评论
第六卷　第一期

陈氏示性式的积分公式

梅向明

（北京师范学院）

陈国才去年在〔1〕中给出陈氏示性式的一个积分公式，他所用的方法与吴光磊〔2〕中的方法类似，都是把问题转化到复 Grassmann 流行中去解决。本文中将给出一种在流形上直接进行计算的方法，不必通过 Grassmann 流形，从而简化了陈国才的证明。最后我们将给出吴光磊的积分公式的一个简单的证明。

设V是 n 维紧致定向 C^∞ 一流形M上的复 m 维矢丛，$s_1,\cdots\cdots,s_{m-k},u$ 是V的光滑截面，其中 $s_1,\cdots,s_{m-k}$ 处处线性无关。截面组 $\tilde{u}=\{s_1,\cdots,s_{m-k},u\}$ 的奇点集是 $N=\{x\in M|s_1(x),s_2(x),\cdots,s_{m-k}(x),u(x)$ 线性相关$\}$，$N=\bigcup_i N_i$，其中 N_i 是N的连通分支。

根据 Pontrjagin的结果〔3,定理1〕，N是M的第 k 个陈氏示性类 C_k 的对偶闭链 DC_k 的 Carrier，所以 $\dim N\geqslant \dim DC_k$，把截面组 $\tilde{u}$ 作微小变动，可以使它们处于一般位置，则 $\dim N=\dim DC_k$，因此我们不妨假定

$$\operatorname{codim} N_i=\operatorname{codim} N=\operatorname{codim} DC_k=\dim C_k=2k$$

在复矢丛V中引进 Hermitian度量 H，使它成为 Hermitian矢丛。经过 Schmidt 正交化手续，我们不妨假定截面 $s_1,\cdots,s_{m-k}$ 已经 Hermitian正交化，即

$$H(s_a,s_b)=\delta_{ab}\quad(a,b=1,\cdots,m-k),$$

并且在 $M\setminus N$ 上还有

$$H(s_a,u)=H(u,s_a)=0,\ H(u,u)=1,$$

这时，截面组 $\tilde{u}$ 的奇点集 N 事实上就是截面 u 的零点集。

再命 V' 是V的子矢丛，它的纤维 V'_x，$x\in M$，Hermitian 正交于每一截面 $s_1,\cdots,s_{m-k}$，则 u 同时也是复矢丛 V' 的光滑截面。

命 ω 是矢丛V中由Hermitian 度量 H 所确定的Hermitian联络的联络形式，$\omega=\partial H\cdot H^{-1}$，$\Omega=\bar{\partial}\omega$ 是相应的曲率形式，则矢丛V的第 k 个陈氏示性式是

$$C_k(\Omega)=\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^k\cdot k!}\sum_{i,j=1}^{m}\varepsilon_{i_1,\cdots,i_k,j_1,\cdots,j_k}\,\Omega_{i_1j_1}\wedge\cdots\wedge\Omega_{i_kj_k}$$

再命 H' 是矢丛V的Hermitian度量 H 在子矢丛 V' 上的限制，ω' 是 H' 所确定的 Hermitian 联络，Ω' 是相应的曲率形式，则矢丛 V' 的第 k 个陈氏示性式是

$$C_k(\Omega')=\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^k\cdot k!}\sum_{\alpha,\beta=1}^{k}\varepsilon_{\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\beta_1,\cdots,\beta_k}\Omega_{\alpha_1\beta_1}\wedge\cdots\wedge\Omega_{\alpha_k\beta_k}=E(\Omega')$$

其中 $E(\Omega')$ 是复矢丛 V' 的 Euler示性式。

用陈-Weil 技巧，作联络ω与ω'之间的同伦，则有

引理1 存在M上的$(2k-1)$次形式τ使得

$$C_k(\Omega')-C_k(\Omega)=d\tau$$

证明： 命$\omega_t=\omega+tu$，其中$u=\omega'-\omega$，$\Omega_t=\bar{\partial}\omega_t$，则

$$\tau=k\int_0^1 C_k(\underbrace{u,\Omega_t,\cdots,\Omega_t}_{(k-1)个})dt$$

由于M紧致，我们显然有

推论 设σ是M上任意闭$(n-2k)$一形式，则

$$\int_M C_k(\Omega)\Lambda\sigma=\int_M C_k(\Omega')\Lambda\sigma=\int_M E(\Omega')\Lambda\sigma$$

根据陈省身的结果〔4〕，我们还有

引理2 存在复矢丛V′上的$(2k-1)$一形式τ'使得

i) $\pi^*E(\Omega')=-d\tau'$

ii) $\int_{S^{2k-1}}\tau'=1$.

其中$\pi:V'\to M$是丛的投影，S^{2k-1}是V′的纤维中的单位球面。

因为u是复矢丛V′的光滑截面，$\pi\cdot u$是M上的恒同映射，所以有

推论 $$E(\Omega')=u^*(-d\tau')=-d(u^*\tau')$$

设P_i是奇点集N_i中任一点，它是M上的向量场u的零点。命B_i是M中Transverse于N_i的Slice，$u|_{B_i}$是向量场u在B_i上的限制。我们把$u|_{B_i}$在P_i点的指标记成$I_u(P_i)$，它是一整数，当P_i在微小变动时它保持不变，因此，$I_u(P_i)$在连通集N_i上是常数，我们可以把它记成$I_u(N_i)$。

现在我们给出陈国才的积分公式

定理1 $$\int_M C_k(\Omega)\Lambda\sigma=\sum_i I_u(N_i)\cdot\int_{N_i}\sigma。$$

证明： 命$N_i(\varepsilon)$表示N_i在M中的ε-管状邻域，当ε充分小时，N_i中任一点的法向测地邻域可以看成欧氏空间，这就是上面所提到的Transverse于N_i的sliceB_i，这时$\partial N_i(\varepsilon)$可以看成$N_i$上的法球丛，纤维是半径为$\varepsilon$的$(2k-1)$维球面$S_i(\varepsilon)$。

$$\int_M C_k(\Omega)\Lambda\sigma=\int_M E(\Omega')\Lambda\sigma=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{M\setminus\bigcup_i N_i(\varepsilon)}-d(u^*\tau'\Lambda\sigma)$$
$$=\sum_i\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\partial N_i(\varepsilon)}u^*\tau'\Lambda\sigma。$$

这是球丛$\partial N_i(\varepsilon)$上的积分，由于$\sigma$与$\varepsilon$无关，它是底空间$N_i$上的形式，所以

$$\int_M C_k(\Omega)\Lambda\sigma=\sum_i\int_{N_i}\sigma\cdot\lim_{\varepsilon\to0}\int_{S_i(\varepsilon)}u^*\tau'$$
$$=\sum_i\int_{N_i}\sigma\cdot\lim_{\varepsilon\to0}\int_{u[S_i(\varepsilon)]}\tau'$$

注意u是定义在$S_i(\varepsilon)$上的单位向量场,所以$\lim_{\varepsilon\to0}u\in S^{2k-1}$（$(2k-1)$维单位球面），并且

$$\lim_{\varepsilon\to0}u[S_i(\varepsilon)]=I_u(P_i)\cdot S^{2k-1}=I_u(N_i)\cdot S^{2k-1},$$

艮据引理2，$\int_{S^{2k-1}}\tau'=1$，所以

$$\int_M C_k(\Omega)\Lambda\sigma=\sum_i\int_{N_i}\sigma\cdot I_u(N_i)\int_{S^{2k-1}}\tau'$$

$$=\sum_i I_u(N_i)\cdot\int_{N_i}\sigma,$$

定理证毕。

特别地，当M是复m继复流形，V是它的切丛，这时命$k=m$，则我们得到Gauos-Bonnet 公式

推论 设M是复m维 Her milian流形，Ω是 Her mifian 联络的曲率形式，$E(\Omega)$是切从T(M) 的 Enler 示性式，则

$$\int_M E(\Omega)=\int_M C_m(\Omega)=\sum_i I_n(P_i)=X(M)$$

下面我们给出吴光磊的陈氏示性式的积分公式的一个证明。

定理 2 设 DC_k 是M中陈氏示性上闭炼 C_k 的对偶闭炼，C_{2k} 是与 DC_k ranouerse地相交的 $2k$ 维练，则 C_{2k} 与 DC_k 的相交指数是

$$C_{2k}\cdot DC_k=\int_{C_{2k}}C_k(\Omega)+\int_{\partial C_{2k}}\widetilde{u}^*\widetilde{\tau}$$

其中$\widetilde{u}$是截面组 $\{s_1,\cdots,s_{m-k},u\}$，$\widetilde{\tau}=\tau+\tau'$

证明：因为M是紧致的，所以C_{2k}仅与DC_k Trans verse 地相交于有限个点 $P_1,\cdots,P_d$。假定我们已经把C_{2k}剖分得充分细密，使得它的每一个单形包含在一个充分小的坐标邻域中，这坐标域可以看成欧氏空间。设$C_{2k}=\sum m_i\sigma_i$，其中仅有d个单形$\sigma_1,\cdots,\sigma_d$分别与DC_kTra-nor erse地相交于点$P_i(i=1,\cdots,d)$。命$B_i(t)$是σ_i中以P_i为中心，ε为半径的实球，它的边缘$S_i(\varepsilon)$是半径为ε的$(2k-1)$维球面。

$$C_{2k}\circ DC_k=\sum_{i=1}^d m_iB_i(\varepsilon)\circ DC_k,$$

根据陈国才〔1〕中的引理 2.1，

$$B_i(\varepsilon)\circ DC_k=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\partial B_i(\varepsilon)}\widetilde{u}^*\widetilde{\tau},$$

另一方面，

$$\int_{C_{2k}}C_k(\Omega)=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{C_{2k}\setminus\cup_i m_iB_i(\varepsilon)}-d(\widetilde{u}^*\widetilde{\tau})$$

$$=-\int_{\partial C_{2k}}\widetilde{u}^*\widetilde{\tau}+\sum_{i=1}^d m_i\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\partial B_i(\varepsilon)}\widetilde{u}^*\widetilde{\tau}$$

$$=-\int_{\partial C_{2k}}\widetilde{u}^*\widetilde{\tau}+\sum_{i=1}^d m_iB_i(\varepsilon)\circ DC_k$$

$$=-\int_{\partial C_{2k}}\widetilde{u}^*\widetilde{\tau}+C_{2k}\circ DC_k,$$

$$\therefore\quad C_{2k}\circ DC_k=\int_{C_{2k}}C_k(\Omega)+\int_{\partial C_{2k}}\widetilde{u}^*\widetilde{\tau}。$$

注：根据陈国才的结果（〔1〕,引理1.1），积分公式中的任意（$n-2k$）次闭形式σ可以选择得好一些，使它在截面组$s_1,\cdots,s_{m-k+1}$的零点集N(已假定$\dim N=2k$）的邻域内为零，这样的话，积分$\int_{\partial N_{(\varepsilon)}} s^{*}\tau'\wedge\sigma$就有意义了，因为在$\sigma\neq 0$的地方超渡式$\tau'$总是有意义的。

参 考 文 献

〔1〕K. T. Chen(陈国才), Degeneracy indices and Chern classes, Adv. in Math., Vol. 45 (1982) no. 1, 73—91.

〔2〕吴光磊，示性式的超渡，数学学报，Vol. 19 (1976), no. 1, 2.

〔3〕L. S. Pontrjagin, Vector field on manifolds(in Russian), Мат. Сбор. (N.S.) 24 (66), 129—162, (1949).

〔4〕陈省身, Onthe curvature integralin Rilmannian manifold, Ann. of Moth., Vol. 46 (1945), 674—684.

B 类零壹矩阵的基的一些定理*

杨安洲　　　　李　浩

（北工大数学系）　（秦皇岛冶金地质进修学院）

定义1　令$n\geqslant 3$，$M=(m_{ij})_{n\times n}$，$m_{ij}=1$或0，对任意固定的$i(1\leqslant i\leqslant n)$最多存在一个$j_0(1\leqslant j_0\leqslant n)$使得$a_{ij_0}=1$，则称（0,1）—矩阵$M$为$B$型的矩阵。

显然B型矩阵在矩阵的乘法运算下成为一个具有单位元的半群。

定义2　令$\boldsymbol{B}=\{M:M$是n级的B型矩阵$\}$，$\boldsymbol{C}\subseteq\boldsymbol{B}$，若对任$B\in\boldsymbol{B}$总存在有$C_1,C_2,\cdots,C_k\in\boldsymbol{C}$使得$B=C_1C_2\cdots C_k$，则称$\boldsymbol{C}$为$\boldsymbol{B}$的一个基。

定理1　$n\geqslant 3$，$C_1=B_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & O \\ & & \ddots & \ddots & \\ O & & & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$，$C_2=B_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & O \\ & & 1 & & \\ O & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$，

$C_3=B_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & & & O \\ & & 1 & & \\ O & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$，$C_4=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & O \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ O & & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$　则$\{C_1,C_2C_3,C_4\}$是$\boldsymbol{B}$的一个基。

定理2　$n\geqslant 3$，若$\boldsymbol{C}$是$\boldsymbol{B}$的基，则$|\boldsymbol{C}|\geqslant 4$。

定理3　$n\geqslant 3$，$\min\{|\boldsymbol{C}|:\boldsymbol{C}$是$\boldsymbol{B}$的基$\}=4$。

* 1985年9月20日收到。