1986年3月

数学研究与评论
第六卷 第一期

FP-内射模决定凝聚环与IF环*

徐岩松

（南京大学）

摘　要

我们在§2.中证明了

1．可换环是Noether环⇔平坦模与内射模的张量积是内射模。

本文的其余部分考虑用FP-内射性质来刻划凝聚环、CF环及IF环，主要结果有：

2．对于环R，下述各条等价：

（1）R是左凝聚环。

（2）对于任意有限表示模$_RM$，FR-内射模$_RN$，都有$Ext_R^2(M, N)=0$

（3）若$N_1\subset_R N$都是FP-内射的，则N/N_1是FP-内射的。

（4）上平坦左R-模的正向极限是上平坦的。

3．R为左且右CF环⇔左R-模M为FP-内射当且仅当M是平坦的。

4．R是右IF环⇔FP-内射右R-模是平坦的。

5．右IF环R是正则环或$gl.w.dimR=\infty$；又若$i.dimM_R<\infty$，则M是平坦的。

6．对于右FP-自内射环R，R为左CF环⇔R为右IF环。特别对于可换环，R为CF环⇔R为IF环。

§1　引　言

本文中的环都是有单位元的结合环，一切模都是酉模。在模范畴中，对于内射模的研究往往比投射模与平坦模来得困难和复杂。日本代数学家Yoneda所提出的问题：设R是可换环，问两个内射R-模的张量积是否仍是内射的〔1〕这个看来不复杂的问题已有近三十年仍悬而未决。已得到的特殊结果有，当R是每个主理想都平坦的Noether环或是有很多个整环的直和时，回答是肯定的，Ishikawa给出R是Noether环时，正面解答的一些等价条件〔1〕。我们将在§2.中从其他一些角度考虑Yoneda问题。

一个模$_RM$称为上平坦〔2〕的，若$Ext_R^1(R/I, M)=0$对一切有限生成左理想I成立，称为FP-内射的，若$Ext_R^1(N, M)=0$对一切有限表示（finitely presented）模$_RN$成立〔4〕。环R称为左CF环，若R是左凝聚（coherent）且$_RR$是上平坦的〔2〕。环R称为右IF环，若每个内射右R-模都是平坦的〔3〕。一个左CF环必是右IF环〔3,定理3.10〕，Jain〔3〕问，右IF环是否是左凝聚的（这等价于问右IF环是否一定是左CF环（参见〔3,定理3.3〕），特别对于可换环是否对？我们将在§4.中讨论这个问题，在附加一定的条件下（R也是右自FP-内射或$i.dimR_R<\infty$）给出肯定的回答，而对于可换环则给出完全肯定的解答。我们将用FP-内射性质来刻划凝聚环、CF环及IF环，由此可以看出，FP-内射是近几年来，模范畴研究中出现的一个新的重要概念。

*1984年4月13日收到。

§ 2　可换环上模的张量积的内射性

本节中的环都是可换环。

定理2.1　若R为可换遗传的Noether环，E为内射模，则对于任意R-模M，有$M\underset{R}{\otimes}E$是内射R-模。

证　设自由模$F=\coprod_{\alpha\in\Gamma}R$使

$$F\longrightarrow M\longrightarrow O$$

正合，则

$$F\otimes E\longrightarrow M\otimes E\longrightarrow O$$

正合，但

$$F\otimes E=(\coprod R)\otimes E\cong\coprod E,$$

因为R是Noether环，E是内射模，所以$\coprod E$是内射的。又由于遗传环上内射模的同态象是内射的，所以$M\otimes E$是内射的。■

定理2.2　设R为可换环，则下述各条等价

（a）R是Noether环。

（b）平坦模与内射模的张量积是内射的。

（c）投射模与内射模的张量积是内射的。

（d）自由模与内射模的张量积是内射的。

证　（a）⇒（b）设M是平坦模，由Larzard〔5〕，M是有限生成自由模的正向极限，设$\varinjlim_{\alpha\in\Gamma}F_\alpha=M$，$F_\alpha$为有限生成自由模。对于内射模E，$R^n\otimes E\cong E^n$是内射的，故

$$E\otimes M=E\otimes\varinjlim F_\alpha=\varinjlim(E\otimes F_\alpha)$$

是内射模的正向极限，所以是内射的〔6，定理4.10〕。

（b）⇒（c）⇒（d）显然。

（d）⇒（a）取内射上生成子E，

$$E^{(N)}\cong(E\otimes R)^{(N)}\cong E\otimes R^{(N)}$$

由假设是内射的，所以R是Noether环（〔7〕定理25.3）。■

§ 3　FP-内射与凝聚环、CF环

设R为环，模$_RA$的子模A_1称为A的纯子模，若对于任意的模M_R都有

$$O\longrightarrow M\otimes A_1\longrightarrow M\otimes A$$

它的一个等价说法（见〔8〕）是对于任意有限表现模$_RN$，有

$$\mathrm{Hom}_R(N,A)\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(N,A/A_1)\longrightarrow O$$

$_RA$称为绝对纯的，若A作为任何模的子模是纯的。下述命题见〔8〕及〔4〕。

命题3.1　对于R-模$_RA$，下述各条等价

（a）A是绝对纯的。

（b）A是E（A）的纯子模（E（A）表示A的内射包）。

（c）A是FP-内射的。

（d） A是一个FP-内射模的纯子模。■

Damiano证明〔2,推论1.17〕，平坦模的FP-内射子模是平坦的，我们证明有更强的结论：

命题3.2 设$O \longrightarrow {}_RA \longrightarrow {}_RB \longrightarrow {}_RC \longrightarrow O$是纯正合列。若B是平坦的，则A及C都是平坦的。

证 对任意模M_R，由长正合列有

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathrm{Tor}_1^R(M,B) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1^R(M,C) & \longrightarrow & M\otimes A & \longrightarrow & M\otimes B & \longrightarrow & M\otimes C & \longrightarrow & O \\ \| & & & \searrow & & \nearrow & & & & & \\ O & & & & O & & & & & & \end{array}$$

故$\mathrm{Tor}_1^R(M,C)=O$，所以C是平坦的，而当B及C皆平坦时，A必是平坦的。■

推论3.3 FP-内射模${}_RM$是平坦的当且仅当可以嵌入一个平坦模。■

环R称为左凝聚的是指每个有限生成左理想是有限表示的。熟知，R为左凝聚的当且仅当每个右平坦模的直积是平坦的。FP-内射模与上平坦模是与凝聚环密τ_2相关的，事实上，它们能够完全刻划凝聚环。

定理3.4 设R是环，下述各条等价

（a） R是左凝聚环。

（b） $\mathrm{Ext}_R^2(M,N)=0$对于任意有限表示模${}_RM$，FP-内射模${}_RN$成立。

（c） 若$N_1 \subset {}_RN$都是FP-内射的，则N/N_1是FP-内射的。

（d） FP-内射左R-模的正向极限是FP-内射的。

（e） 上平坦左R-模的正向极限是上平坦的。

（f） 内射左R-模的正向极限是上平坦的。

证 (a)⇒(b)〔4,引理3.1〕。

(b)⇒(a) 设I是R的任一有限生成左理想，则R/I是有限表示模且有正合列

$$O \longrightarrow I \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow O$$

对于任意FP-内射模${}_RN$，由长正合列得

$O=\mathrm{Ext}_R^1(R,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(I,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^2(R/I,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^2(R,N)=O$。根据假设$\mathrm{Ext}_R^2(R/I,N)=O$，所以$\mathrm{Ext}_R^1(I,N)=O$。由〔9〕，I是有限表示模，于是R是左凝聚的。

(b)⇒(c) 对于任意有限表示模${}_RM$，

$O=\mathrm{Ext}_R^1(M,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(M,N/N_1) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^2(M,N_1)=O$

所以$\mathrm{Ext}_R^1(M,N/N_1)=O$，$N/N_1$是FP-内射的。

(c)⇒(b) 设E（N）为N的内射包，则

$O=\mathrm{Ext}_R^1(M,E(N)) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(M,E(N)/N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^2(M,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^2(M,E(N))=0$

由假设E（N）/N是FP-内射的，$\mathrm{Ext}_R^1(M,E(N)/N)=O$，所以$\mathrm{Ext}_R^2(M,N)=O$

(a)⇒(d)〔4,定理3.2〕

(a)⇒(e) 对于左凝聚环，右上平坦与左FP-内射等价〔2,定理1.15〕，于是归结为(a)⇒(d)。

(e)⇒(f) 显然。

(f)⇒(a) 令K是R的任一有限生成左理想，我们只要证明K是有限表示模。熟知有限生

成模为有限表示模的正向极限，设

$$K=\varinjlim M_i,\ M_i\text{为有限表示模}$$

作内射模$E(M_i)$的正向系统，由假设$\varinjlim E(M_i)$是上平坦的，于是有可换图

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r] & K \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, equal] & R \arrow[d, dashed, "f_1"] \\
O \arrow[r] & \varinjlim M_i \arrow[r, "\rho"] & \varinjlim E(M_i)
\end{tikzcd}$$

映射$M_i\longrightarrow\varinjlim M_i$与$E(M_i)\longrightarrow\varinjlim E(M_i)$分别记为$\lambda_i$和$\bar{\lambda}_i$，设$f(R)\subset\bar{\lambda}_j(E(M_j))\subset\varinjlim E(M_i)$，因为R是投射模，于是有

$$\begin{tikzcd}
 & R \arrow[dl, dashed, "g_j"'] \arrow[d, "f"] & \\
E(M_j) \arrow[r, "\bar{\lambda}_j"'] & \bar{\lambda}_j(E(M_j)) \arrow[r] & O
\end{tikzcd}$$

复合映射

(1) $$K\longrightarrow R\longrightarrow E(M_j)\longrightarrow E(M_j)/M_j$$

在正向极限下为O，因为K是有限生成的，当 j 充分大时，(1)式即为O映射，于是有可换图

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, dashed, "g_j'"'] & R \arrow[d, "g_j"] \\
O \arrow[r] & M_j \arrow[r] & E(M_j)
\end{tikzcd}$$

因而

$$\begin{tikzcd}
 & K \arrow[dl, "g_j'"'] \arrow[d, equal] \\
M_j \arrow[r, "\lambda_j"'] & \varinjlim M_i
\end{tikzcd}$$

即$\lambda_j g_j'=1_K$，于是$M_j\cong K\oplus K'$。因为M_j是有限表示模，所以K是有限表示的，这就证明了R是左凝聚环。■

定理 3.4澄清了左凝聚与左FP-内射及上平坦之间的关系，从而可除去以往许多命题中的不必要假设。例如，我们有

推论3.5　对于环R，下述各条等价

(a) R为CF环（即是左CF环又是右CF环)。

(b) R-模$_RM$是上平坦的当且仅当是平坦的。

(c) R-模$_RM$是FP-内射的当且仅当是平坦的。

证　(a)⇔(b) 当(b)成立时，上平坦的正向极限就是平坦模的正向极限，所以是平坦的，因而是上平坦的。于是由定理 3.4， R为左凝聚环，由〔2,定理2.4〕,(a)与(b)等价。

同理证明(a)与(c)等价。■

§ 4 FP-内射与IF环

FP-内射同样可以刻划IF环。

定理4.1 设R为环，则下述各条等价

（a） R是右IF环。

（b）FP-内射模M_R是平坦的。

（c）若$N_1 \subset N_R$都是FP-内射模，则N/N_1是平坦的。

证 (a)⇒(b) FP-内射模N是其内射包E（N）的纯子模（命题3.1），由假证E（N）是平坦的，再根据命题 3.2， N是平坦的。

(b)⇒(c) 正合列

$$O \longrightarrow N_1 \longrightarrow N \longrightarrow N/N_1 \longrightarrow O$$

是纯的，因为N_1是FP-内射的。根据假设N是平坦的，所以N/N_1是平坦的（命题3.2）。

(c)⇒(a) 任意内射模E_R总是FP-内射的，又O模显然是FP-内射的，于是$E=E/O$是平坦的，即R是右IF环。█

Jain〔3,定理 4〕证明一个右IF环若$gl\cdot w\cdot dimR \leqslant 1$，则R是正则环，然而我们有更确切的结论

定理4.2 一个右IF环是正则环或$gl.w.dimR=\infty$。

证 若$gl.w.dimR=n<\infty$，对于任意模M_R，作内射分解

$$O \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^{n-1} \xrightarrow{\partial^{n-1}} E^n \longrightarrow \cdots$$

于是有

$$O \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^{n-1} \longrightarrow I_m \partial^{n-1} \longrightarrow O$$

正合，但$E^i (i=0,1,\cdots, n-1)$是平坦模，$w.dimI_m\partial^{n-1} \leqslant n$，所以M是平坦的，R是正则环。█

用上面证明的思想，我们可以给出 QF 环是半单环或$r.gl.dimR=\infty$的一个简法证明，这只要把定理 4.2及证明中的平坦用投射来代替即可。

从上述定理的证明过程还可得如下的推论

推论4.3 设R是右IF环,若$r.i.dimM_R<\infty$，则M是平坦模。█

命题4.4 设R为右IF环,若$r.i.dimM_R<\infty$，则M是FP-内射模。

证 取内射模E_R，使成立如下的正合列

（2） $$O \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow M_1 \longrightarrow O$$

则$r.i.dimE_1<\infty$。由推论4.3，M_1是平坦的，于是（2）式是纯正合列，根据E的内射性得M是FP-内射模（命题3.1）。█

下面考虑Jain问题（见 § 1）。

定理4.5 设R为环，若R是右自FP-内射的，则R为左CF环当且仅当R为右IF环。

证 ⇒〔3,定理3.10〕。

⇐ R为右IF环，则是左自FP-内射的〔3,定理3.3〕。下证R为左凝聚的，对于任意集合X，任意有限相关模N_R，因为R_R是内射的，所以

$$\mathrm{Ext}^1_R(N,\ R^X_R) \cong \prod_X \mathrm{Ext}^1_R(N,\ R) = 0$$

故R^Z_R是FP-内射的，由定理4.1，R^X_R是平坦的，所以R是左凝聚的〔10,定理5.12〕。∎

根据命题4.4，若$r.i.\dim R_R<\infty$，R是右IF环，则R_R是FP-内射模，于是有

推论4.6　设R为环，若$r.i.\dim R_R<\infty$，则R为左CF环当且仅当R为右IF环。∎

因为右IF环是左FP-自内射的，故有

推论4.7　设R为可换环，则R是CF环当且仅当R是IF环。∎

即我们回答了Jain问题的关于可换环的部分。

作者对周伯壎教授和佟文廷付教授的指导表示衷心感谢。

参　考　文　献

〔1〕Ishikawa, T., On injective modules and flat modules, J. Math. Soc. Japan, 17(1965), 291—296.

〔2〕Damiano, R. F., Coflat rings and modules, Pac. J. Math. 81(1979), 349—369.

〔3〕Jain, S., Flat and FP-injective , Proc . Amer. Math. Soc. 41(1973), 437—442.

〔4〕Stenström, B., Coherent rings and FP-injective modules, J. London Math. Soc. 2(1970), 323—329.

〔5〕Lazard, D., Sur les modules plats, Comp. Rend.,258(1964), 6313—6316.

〔6〕Rotman, J. J., An Introduction to Homological Algebra, Academic Press, 1979.

〔7〕Anderson, F. and Fuller, K., Rings and Categories of Modules, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1974.

〔8〕Megibben, C. , Absolutely pure modules , Proc. Math. Soc. 26(1970), 561—566.

〔9〕Enochs, E., A note on absolutely pure modules, Canad. Math. Bull. 19(1976), 361—362.

〔10〕Goodeal, K. R., Ring Theory, New York, Marcel. Dekker, Inc. 1976.