1986年3月

数学研究与评论
第六卷　第一期

T_i空间为S-闭空间的一个充要条件*

（$i=2\frac{1}{3}$，$2\frac{2}{3}$，3，$3\frac{1}{2}$，4，5）

吉　智　方

（内蒙古师范大学数学系）

王国俊〔1〕提出了如下的问题："如果T_2空间X在每个T_2空间Y中的不定映射的象都是Y中的闭集，X是否必定是极不连通空间"。周浩旋〔3〕对此问题作了肯定的回答，从而证实了Thompson，T.〔4〕的主要结论还是正确的。该结论说："为使T_2空间X是S-闭空间，必须且只须X在每个T_2空间Y中的不定映射的象都是Y中的闭集"。（注、原证明有错）。

本文将上述结果扩充到各种分离性空间，得到相应的结果。

定理1．如果T_i空间X在每个T_i空间Y中的不定映射的象都是Y中的闭集，则X是极不连通空间。（$i=2\frac{1}{3}$，$2\frac{2}{3}$，3，$3\frac{1}{2}$，4，5，6）

定理2．为使T_i空间X是S-闭空间，必须且只须X在每个T_i空间Y中的不定映射的象都是Y中的闭集。（$i=2\frac{1}{3}$，$2\frac{2}{3}$，3，$3\frac{1}{2}$，4，5）

注1．如果将定理1条件中的"T_i空间"替换成"几乎正则空间"，"正则空间"，"全正则空间"，"正规空间"，"全正规空间"，"完正规空间"等，定理1的结论仍然成立。

注2．当$i=2\frac{2}{3}$，3，$3\frac{1}{2}$，4，5时，可将定理1和定理2条件中的"不定映射"换成"S-连续映射"，但不能换成"连续映射"。

注3．定理1在$i=2\frac{1}{3}$，$2\frac{2}{3}$，3，$3\frac{1}{2}$，4，5，6的各种情形下所得到的定理是相互独立的，即不能从其中一个推出另一个。因此定理1实际上包含了七个彼此独立的定理。同样，定理2包含了六个彼此独立的定理。

定理3．如果几乎正则（或正则、全正则、正规、全正规）空间X在每个几乎正则（或正则、全正则、正规、全正规）空间Y中的不定映射的象都是Y中的闭集，则X是S-闭空间。

定理2的证明基于定理1和〔1〕中引理3，至于定理1的证明我们以$i=5$的情形简要说明如下。

用反证法．设X不是极不连通空间，则有空间X中的正则闭集F，F非开集。于是$E=F-F^\circ\neq\phi$，令$G=X-F$，则G是正则开集，且$E=G^--G$．取一个和E对等的集合T，使$T\cap X=\phi$，令φ：$E\longrightarrow T$为一一映射。构作拓扑空间$Y=X\cup T$，其邻域系规定如下：对任意$x\in X-E$，取x在空间X中的开邻域为基本邻域；对任意$e\in E$，取e在空间X中的开邻域与F的交为基本邻域；对任意$\xi\in T$，取$\varphi^{-1}(\xi)$在空间X中的开邻域V与G的交再与$\varphi(V\cap E)$

* 1985年5月6日收到

的并为基本邻域。容易验证Y是一个T_2型拓扑空间，并且X在空间Y中不是闭集。下面再证明两点：

（i） Y是T_5空间。只需证明Y是全正规空间，即证明对空间Y中的任一对分离集A，B，存在空间Y中的开集U，V，使$A\subset U$，$B\subset V$，且$U\cap V=\phi$。显然

$$A=(A\cap F)\cup(A\cap G)\cup(A\cap T),\quad B=(B\cap F)\cup(B\cap G)\cup(B\cap T)$$

容易验证（$A\cap F$）与（$B\cap F$）是空间X中的一对分离集，（$A\cap G$）$\cup\varphi^{-1}$（$A\cap T$）与（$B\cap G$）$\cup\varphi^{-1}$（$B\cap T$）也是空间X中的一对分离集。由X是全正规空间，存在空间X中的开集U_1，V_1，U_2，V_2，满足：

$$A\cap F\subset U_1,\ B\cap F\subset V_1,\ U_1\cap V_1=\phi$$

$$(A\cap G)\cup\varphi^{-1}(A\cap T)\subset U_2,\quad (B\cap G)\cup\varphi^{-1}(B\cap T)\subset V_2,\ U_2\cap V_2=\phi。最后，$$

$$U=(U_1\cap F)\cup(U_2\cap G)\cup\varphi(U_2\cap E),\quad V=(V_1\cap F)\cup(V_2\cap G)\cup\varphi(V_2\cap E)$$

就是空间Y中分别包含A与B的互不相交的开集，即Y是全正规空间。

（ii） 内射$f: X\longrightarrow Y$是不定映射。设S是空间Y中的半开集，即存在Y中的开集W，使$W\subset S\subset W_y^-$，于是有

$$W-(E\cup T)\subset S-T\subset W_y^- -T,\quad W-(E\cup T)\subset f^{-1}(S)\subset W_y^- -T$$

注意到$W-(E\cup T)$是空间Y中的开集，且

$$W_y^- -T=[(W\cap F)_y^-\cup(W\cap G)_y^-]-T=(W\cap F^\circ)^-\cup[(W\cap G)_y^- -T]$$
$$\subset(W\cap F^\circ)^-\cup(W\cap G)^-=[W-(E\cup T)]^-$$

所以$f^{-1}(S)$是空间Y中的半开集，f是不定映射。

综合（i），（ii），我们证明了从T_5空间X到T_5空间Y中的不定映射f的象$f(X)=X$不是空间Y中的闭集，这与定理所设条件矛盾。于是X是极不连通空间。

由〔1〕，〔2〕，〔6〕的工作容易推得

命题 1　T_i空间X是S-闭的$\Longrightarrow$X是T_i绝对闭的。（$i=2,\ 2\frac{1}{3},\ 2\frac{2}{3},\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$）

命题 2　T_i空间X是S-闭的$\Longleftarrow$X是T_i绝对闭的。（$i=1,\ 1\frac{1}{2}$）

我们能够举出反例，说明命题1和命题2的逆命题都不成立。于是我们看到在从$T_{1\frac{1}{2}}$空间转到T_2空间的时候，S-闭性与绝对闭性的强弱关系有一个转折。因此可以猜测在$T_{1\frac{1}{2}}$和T_2之间有一种分离性T_α，满足：

T_α空间是S-闭的$\Longleftrightarrow$X是T_α绝对闭的。也可以提出更一般的问题："是否存在某种性质P，使P空间X是S-闭的$\Longleftrightarrow$X是P绝对闭的？如果这样的性质P存在，那么它们都是些什么样的性质？"。

注：本文采用的记号和术语，其义可在〔1〕，〔2〕，〔5〕，〔6〕中查到。

参 考 文 献

〔1〕王国俊，"S-闭空间的性质"，数学学报，24：1（1981），55—63。

〔2〕王国俊，"S-闭空间的绝对闭性"，科学通报，27：21（1982），1289—1291。

〔3〕周浩旋，"弱连续性在绝对理论与S-闭空间理论中的应用"，陕西师大学报1979，1：16—24。

〔4〕Thompson, T., “Semicontinuous and irresolute images of S-closed Spaces”, proc. Amer. Math. Soc., 66(1977), 359—362.
〔5〕关肇直,“拓扑空间概论”,科学出版社, 北京, 1985.
〔6〕吉智方, “S-闭空间的若干性质”,内蒙师大学报（自然科学版）,2（1984）, 9—17.

A Necessary and Sufficient Condition for a T_i-space to be S-closed space

Ji Zhifang（吉智方）

(Neimenggu Normal University)

Abctract

In this paper, we obtain the following results:

Theorem 1 If every irresolute image of a T_i-Space X in any T_i-Space is closed, then X is extremally disconnected. $(i = 2\frac{1}{3},\ 2\frac{2}{3},\ 3,\ 3\frac{1}{2},\ 4,\ 5,\ 6)$

Theorem 2 A T_i-space X is S-Closed if and only if the irresolute image of X in any T_i-Space is Closed. $(i = 2\frac{1}{3},\ 2\frac{2}{3},\ 3,\ 3\frac{1}{2},\ 4,\ 5)$.

（上接第38页）

推　论　设$F(z)=z+b_{n+1}z^{n+1}+\cdots$属于$C_n(\beta,\ \rho)$。若$c\geqslant 1$，$0\leqslant\beta<1$，$0\leqslant\rho\leqslant\sigma<1$，则$f(z)=\frac{z^{1-c}}{1+c}(z^cF(z))'$在$|z|<\sqrt{R_3}$内属于$C_n((\sigma-\rho+\beta(1-\sigma))/(1-\rho),\sigma)$,这里$R_3$是方程$(2\rho+c-1)(2\rho-\sigma-1)R^2+2[(\rho+c)(\rho-\sigma)-(1-\rho)(n+1-\rho)]R+(1+c)(1-\sigma)=0$的正根。所得结果是准确的。

参 考 文 献

〔1〕吴卓人，星象积分算子式与Bazilevic函数族，数学学报，**27**（1984），394—409。
〔2〕R. J. Libera and A. E. Livingston, On the univalence of some classes of regular functions, Proc. AMS., **30**（1971), 327-336.