关于幂和公式的一般性质

陈景润　　黎鉴愚

(华中工学院及中国科学院数学研究所)　　(贵州民族学院)

一、前　言

当 n 与 k 都是正整数时，我们简称$\sum_{m=1}^{n} m^k$为"幂和",并以 $S_k(n)$ 记之。从古希腊的阿基米德开始，这个问题就吸引着很多数学家的兴趣。十七世纪以前的数学家们仅仅求出了二次和三次幂的求和公式。而雅各·伯努利在《猜度术》中，一举得到了任意次幂的求和公式如下：

$$S_k(n)=\frac{1}{k+1}\left(B_{k+1}(n+1)-B_{k+1}\right)$$

其中 B_k 由$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}x^k\ (|x|<2\pi)$ 所定义，即是著名的 Bernoulli 数。而 $B_k(y)$ 由$\frac{xe^{xy}}{e^x-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k(y)}{k!}x^k$ (y 是一个实数) 所定义。但当 $4<k<10$时，利用Bernoulli数来求幂和公式，就需要用到较深的数学知识和复杂的数值计算，而当 $k>10$ 时，几乎无法利用 Bernoulli 数来求幂和公式了。由于组合数学的发展，近代数学家们对这个有趣的问题又进行了大量的研究，并在他们的文章中（见文献〔5〕到文献〔12〕)，提出或用不同的组合数学的方法来处理幂和问题。他们给出了最高次数为13的幂和公式如下：

$$S_1(n)=\frac{1}{2}(n^2+n),\quad S_2(n)=\frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n),\quad S_3(n)=\frac{1}{4}(n^4+2n^3+n^2),$$

$$S_4(n)=\frac{1}{30}(6n^5+15n^4+10n^3-n),\quad S_5(n)=\frac{1}{12}(2n^6+6n^5+5n^4-n^2),$$

$$S_6(n)=\frac{1}{42}(6n^7+21n^6+21n^5-7n^3+n),\quad S_7(n)=\frac{1}{24}(3n^8+12n^7+14n^6-7n^4+2n^2),$$

$$S_8(n)=\frac{1}{90}(10n^9+45n^8+60n^7-42n^5+20n^3-3n),$$

$$S_9(n)=\frac{1}{20}(2n^{10}+10n^9+15n^8-14n^6+10n^4-3n^2),$$

$$S_{10}(n)=\frac{1}{66}(6n^{11}+33n^{10}+55n^9-66n^7+66n^5-33n^3+5n)$$

$$S_{11}(n)=\frac{1}{24}(2n^{12}+12n^{11}+22n^{10}-33n^8+44n^6-33n^4+10n^2)$$

$$S_{12}(n)=\frac{1}{2730}(210n^{13}+1365n^{12}+2730n^{11}-5005n^9+8580n^7-9009n^5+4550n^3-691n)$$

$$S_{13}(n)=\frac{1}{420}(30n^{14}+210n^{13}+455n^{12}-1001n^{10}+2145n^8-3003n^6+2275n^4-691n^2)$$

他们证明上述公式时用了大量的数值计算，又公式本身也很复杂，规律性不强。我们在文〔2〕、

* 1984年2月1日收到。

〔3〕、〔4〕中给出了最高次数为30的幂和公式如下：

令 $\bar{n}=n(n+1)$，则我们有

$S_1(n)=\frac{1}{2}\bar{n}$，$S_2(n)=\frac{1}{6}(2n+1)\bar{n}$，$S_3(n)=\frac{1}{4}\bar{n}^2$，$S_4(n)=\frac{1}{30}(2n+1)\bar{n}(3\bar{n}-1)$，

$S_5(n)=\frac{1}{12}\bar{n}^2(2\bar{n}-1)$，$S_6(n)=\frac{1}{42}(2n+1)\bar{n}(3\bar{n}^2-3\bar{n}+1)$，$S_7(n)=\frac{1}{24}\bar{n}^2(3\bar{n}^2-4\bar{n}+2)$，

$S_8(n)=\frac{1}{90}(2n+1)\bar{n}(5\bar{n}^3-10\bar{n}^2+9\bar{n}-3)$，$S_9(n)=\frac{1}{20}\bar{n}^2(2\bar{n}^3-5\bar{n}^2+6\bar{n}-3)$

$S_{10}(n)=\frac{1}{66}(2n+1)\bar{n}(3\bar{n}^4-10\bar{n}^3+17\bar{n}^2-15\bar{n}+5)$，$S_{11}(n)=\frac{1}{24}\bar{n}^2(2\bar{n}^4-8\bar{n}^3+17\bar{n}^2-20\bar{n}+$

$+10)$，$S_{12}(n)=\frac{1}{2730}(2n+1)\bar{n}(105\bar{n}^5-525\bar{n}^4+1435\bar{n}^3-2360\bar{n}^2+2073\bar{n}-691)$，$S_{13}(n)=$

$=\frac{1}{420}\bar{n}^2(30\bar{n}^5-175\bar{n}^4+574\bar{n}^3-1180\bar{n}^2+1382\bar{n}-691)$，$S_{14}(n)=\frac{1}{90}(2n+1)\bar{n}(3\bar{n}^6-21\bar{n}^5+$

$+84\bar{n}^4-220\bar{n}^3+359\bar{n}-315\bar{n}+105)$，$S_{15}(n)=\frac{1}{48}\bar{n}^2(3\bar{n}^6-24\bar{n}^5+112\bar{n}^4-352\bar{n}^3+718\bar{n}^2-$

$840\bar{n}+420)$，$S_{16}(n)=\frac{1}{510}(2n+1)\bar{n}(15\bar{n}^7-140\bar{n}^6+77\bar{n}^5-2930\bar{n}^4+7595\bar{n}^3-12370\bar{n}^2+$

$+10851\bar{n}-3617)$，$S_{17}(n)=\frac{1}{180}\bar{n}^2(10\bar{n}^7-105\bar{n}^6+660\bar{n}^5-2930\bar{n}^4+9114\bar{n}^3-18555\bar{n}^2+$

$+21702\bar{n}-10851)$，$S_{18}(n)=\frac{1}{3990}\cdot(2n+1)\bar{n}(105\bar{n}^8-1260\bar{n}^7+9114\bar{n}^6-47418\bar{n}^5+$

$-178227\bar{n}^4-460810\bar{n}^3+750167\bar{n}^2-658005\bar{n}+219335)$，$S_{19}(n)=\frac{1}{840}\bar{n}^2(24\bar{n}^8-560\bar{n}^7+$

$+4557\bar{n}^6-27096\bar{n}^5+118818\bar{n}^4-368648\bar{n}^3+750167\bar{n}^2-877340\bar{n}+438670)$，$S_{20}(n)=$

$=\frac{1}{6930}(2n+1)\bar{n}(165\bar{n}^9-2475\bar{n}^8+22770\bar{n}^7-155100\bar{n}^6+795795\bar{n}^5-2981895\bar{n}^4+$

$+7704835\bar{n}^3-12541460\bar{n}^2+11000493\bar{n}-3666831)$，$S_{21}(n)=\frac{1}{660}\bar{n}^2(30\bar{n}^9-495\bar{n}^8+$

$+5060\bar{n}^7-38775\bar{n}^6+227370\bar{n}^5-99396\bar{n}^4+3081934\bar{n}^3-6270730\bar{n}^2+7333662\bar{n}-$

$-3666831)$，$S_{22}(n)=\frac{1}{4830}(2n+1)\bar{n}(105\bar{n}^{10}-1925\bar{n}^9+21945\bar{n}^8-189420\bar{n}^7+1270731\bar{n}^6-$

$-6497057\bar{n}^5+24326078\bar{n}^4-62845440\bar{n}^3+102292953\bar{n}^2-89723865\bar{n}+29907955)$，

$S_{23}(n)=\frac{1}{5040}\bar{n}^2(210\bar{n}^{10}-4200\bar{n}^9+52668\bar{n}^8-505120\bar{n}^7+3812193\bar{n}^6-22275624\bar{n}^5+$

$+97304312\bar{n}^4-301658112\bar{n}^3+613757718\bar{n}^2-717790920\bar{n}+358895460)$，$S_{24}(n)=$

$=\frac{1}{13650}(2n+1)\bar{n}(273\bar{n}^{11}-6006\bar{n}^{10}+83083\bar{n}^9-885885\bar{n}^8+7522515\bar{n}^7-50269856\bar{n}^6+$

$+256794972\bar{n}^5-961297596\bar{n}^4+2483374425\bar{n}^3-4042136250\bar{n}^2+3545461365\bar{n}-$

$-1181820455)$，$S_{25}(n)=\frac{1}{1092}\bar{n}^2(42\bar{n}^{11}-1001\bar{n}^{10}+15106\bar{n}^9-177177\bar{n}^8+1671670\bar{n}^7-$

$-12567464\bar{n}^6+73369992\bar{n}^5-320432532\bar{n}^4+993349770\bar{n}^3-2021068125\bar{n}^2+2363640910\bar{n}-$ $-1181820455)$，$S_{26}(n)=\frac{1}{378}(2n+1)\bar{n}(7\bar{n}^{12}-182\bar{n}^{11}+3003\bar{n}^{10}-38753\bar{n}^9+406120\bar{n}^8-$ $-3434184\bar{n}^7+22926780\bar{n}^6-117091548\bar{n}^5+438304419\bar{n}^4-1132285290\bar{n}^3+$ $+42993525\bar{n}^2-1616536467\bar{n}+538845489)$，$S_{27}(n)=\frac{1}{56}\bar{n}^2(2\bar{n}^{12}-56\bar{n}^1+1001\bar{n}^{10}$ $-14092\bar{n}^9+162448\bar{n}^8-1526304\bar{n}^7+11463390\bar{n}^6-66909456\bar{n}^5+292202946\bar{n}^4$ $-905828232\bar{n}^3+1842993525\bar{n}^2-2155381956\bar{n}+1077690978)$，$S_{28}(n)=\frac{1}{870}(2n+1)\bar{n}$ $(15\bar{n}^{13}-455\bar{n}^{12}+8827\bar{n}^{11}-135564\bar{n}^{10}+1718002\bar{n}^9-17924270\bar{n}^8+151408620\bar{n}^7$ $-1010562744\bar{n}^6+5160854643\bar{n}^5-19318200399\bar{n}^4+49905176965\bar{n}^3-81229418480\bar{n}^2$ $+71248383087\bar{n}-23749461029)$，$S_{29}(n)=\frac{1}{60}\bar{n}^2(2\bar{n}^{13}-65\bar{n}^{12}+1358\bar{n}^{11}-22594\bar{n}^{10}$ $+312364\bar{n}^9-3584854\bar{n}^8+33646360\bar{n}^7-252640686\bar{n}^6+1474529898\bar{n}^5-6439400133\bar{n}^4+$ $19962070786\bar{n}^3-40614709240\bar{n}^2+47498922058\bar{n}-23749461029)$，$S_{30}(n)=\frac{1}{14322}(2n+))$ $\cdot\bar{n}(231\bar{n}^{14}-8085\bar{n}^{13}+182182\bar{n}^{12}-3283280\bar{n}^{11}+49483434\bar{n}^{10}-624177554\bar{n}^9+6504825250\bar{n}^8$ $-54932452344\bar{n}^7+366618940611\bar{n}^6-1872264497565\bar{n}^5+7008271631088\bar{n}^4$ $-18104627279060\bar{n}^3+29468449283827\bar{n}^2-25847523828015\bar{n}+8615841276005)$

关于幂和公式的一般性质，在文〔1〕中有

$$S_k(n)=\frac{1}{k+1}n^{k+1}+\frac{1}{2}n^k+\frac{k}{2}An^{k-1}-\frac{k(k-1)(k-2)}{2\cdot3\cdot4}Bn^{k-7}+$$
$$+\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}Cn^{k-5}-$$
$$-\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-5)(k-6)}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}Dn^{k-7}+\cdots \qquad (*)$$

其中，$A=\frac{1}{6}$，$B=\frac{1}{30}$，$C=\frac{1}{42}$，$D=\frac{1}{30}$，…是著名的伯努利数。由公式（*）我们知道 $S_k(n)$ 是 n 的 $k+1$ 次有理多项式。又在文〔2〕到〔4〕中，我们计算出当 $2<k<15$ 时，$S_{2k-1}(n)$ 是 $\bar{n}^2$ 乘上 $\bar{n}$ 的 $k-2$ 次有理多项式，而当 $1\leqslant k\leqslant15$ 时，$S_{2k}(n)$ 是 $(2n+1)$ 乘上 $\bar{n}$ 再乘上 $\bar{n}$ 的 $k-1$ 次有理多项式。本文的目的是要用组合数学的方法来证明当 $k\geqslant16$ 时，$S_{2k-1}(n)$ 都是 $\bar{n}^2$ 乘上 $\bar{n}$ 的 $k-2$ 次有理多项式，同时 $S_{2k}(n)$ 都是 $(2n+1)$ 乘上 $\bar{n}$ 再乘上 $\bar{n}$ 的 $k-1$ 次有理多项式。

二、引　　理

引理：设 n 和 k 都是正整数，则有

$$2\sum_{i=1}^{k}\binom{2k}{2i-1}S_{2i-1}(n)=(n+1)^{2k}+n^{2k}-1-2kn(n+1),\quad (k>2) \tag{1}$$

$$2\sum_{i=1}^{k}\binom{2k+1}{2i}S_{2i}(n)=(n+1)^{2k+1}+n^{2k+1}-2n-1 \tag{2}$$

证明：我们对 n 使用数学归纳法来分别证明（1）和（2）式。当 $n=1$ 时，由于 $S_{2i-1}(1)=1$，因此（1）式两边分别为 $2\sum_{i=2}^{k}\binom{2k}{2i-1}$ 和 $2^{2k}-4k$，又由于

$$2^{2k}-4k=(1+1)^{2k}-(1-1)^{2k}-2\binom{2k}{1}=\sum_{i=0}^{2k}\binom{2k}{i}-\sum_{i=0}^{2k}(-1)^{i}\binom{2k}{i}-2\binom{2k}{1}$$

$$=2\sum_{i=1}^{k}\binom{2k}{2i-1}-2\binom{2k}{1}=2\sum_{i=2}^{k}\binom{2k}{2i-1}$$

故（1）式对 $n=1$ 成立。现在我们假设当 $n=l(l>1)$ 时（1）式成立，即

$$2\sum_{i=2}^{k}\binom{2k}{2i-1}S_{2i-1}(l)=(l+1)^{2k}+l^{2k}-1-2kl(l+1)$$

则当 $n=l+1$ 时，我们有

$$2\sum_{i=2}^{k}\binom{2k}{2i-1}S_{2i-1}(l+1)=2\sum_{i=2}^{k}\binom{2k}{2i-1}S_{2i-1}(l)+2\sum_{i=2}^{k}\binom{2k}{2i-1}(l+1)^{2i-1}$$

$$=(l+1)^{2k}+l^{2k}-1-2kl(l+1)+2\sum_{i=1}^{k}\binom{2k}{2i-1}(l+1)^{2i-1}-2\binom{2k}{1}(l+1)$$

$$=(l+1)^{2k}-1-2k(l+1)(l+2)+((l+1)-1)^{2k}+2\sum_{i=1}^{k}\binom{2k}{2i-1}(l+1)^{2i-1}$$

$$=(l+1)^{2k}-1-2k(l+1)(l+2)+\sum_{i=0}^{2k}(-1)^{i}\binom{2k}{i}(l+1)^{i}+2\sum_{i=1}^{k}\binom{2k}{2i-1}(l+1)^{2i-1}$$

$$=(l+1)^{2k}-1-2k(l+1)(l+2)+\sum_{i=0}^{2k}\binom{2k}{i}(l+1)^{i}$$

$$=(l+1)^{2k}-1-2k(l+1)(l+2)+((l+1)+1)^{2k}$$

故（1）式对 $l+1$ 也成立。因而（1）式得证。

当 $n=1$ 时，由于 $S_{2i}(1)=1$，因而（2）式两边分别为 $2\sum_{i=1}^{k}\binom{2k+1}{2i}$ 和 $2^{2k+1}-2$，又由于 $2\sum_{i=1}^{k}\binom{2k+1}{2i}=2\sum_{i=0}^{k}\binom{2k+1}{2i}-2=\sum_{i=0}^{2k+1}\binom{2k+1}{i}+\sum_{i=0}^{2k+1}(-1)^{i}\binom{2k+1}{i}-2=$

$$=(1+1)^{2k+1}+(1-1)^{2k+1}-2=2^{2k+1}-2$$

所以（2）式对 $n=1$ 成立。现在我们假设当 $n=l(l>1)$ 时（2）式成立，即

$$2\sum_{i=1}^{k}\binom{2k+1}{2i}S_{2i}(l)=(l+1)^{2k+1}+l^{2k+1}-2l-1$$

则当 $n=l+1$ 时有

$$2\sum_{i=1}^{k}\binom{2k+1}{2i}S_{2i}(l+1)=2\sum_{i=1}^{k}\binom{2k+1}{2i}S_{2i}(l)+2\sum_{i=1}^{k}\binom{2k+1}{2i}(l+1)^{2i}=$$

$$=(l+1)^{2k+1}+l^{2k+1}-2l-1+2\sum_{i=0}^{k}\binom{2k+1}{2i}(l+1)^{2i}-2$$

$$=(l+1)^{2k+1}+((l+1)-1)^{2k+1}-2(l+1)-1+2\sum_{i=0}^{k}\binom{2k+1}{2i}(l+1)^{2i}$$

$$=(l+1)^{2k+1}-2(l+1)-1+\sum_{i=0}^{2k+1}(-1)^{2k+1-i}\binom{2k+1}{2i}(l+1)^{i}+2\sum_{i=0}^{k}\binom{2k+1}{2i}(l+1)^{2i}$$

$$=(l+1)^{2k+1}-2(l+1)-1+\sum_{i=0}^{2k+1}\binom{2k+1}{i}(l+1)^{i}$$

$$=(l+1)^{2k+1}-2(l+1)-1+\big((l+1)+1\big)^{2k+1}$$

即（2）式对 $l+1$ 也成立，故（4）式得证。引理证毕。

三、定　　理

以下我们约定 $P_i(k,x)$ 表 x 的 k 次有理多项式，其中 $1<i<2$。

定理：令 $\bar{n}=n(n+1)$，$\bar{m}=2n+1$，则有

$$S_{2k-1}(n)=\bar{n}^2P_1(k-2,\bar{n}),\quad (k>2) \tag{3}$$

$$S_{2k}(n)=\bar{m}\bar{n}P_2(k-1,\bar{n}) \tag{4}$$

证明：我们首先对 k 使用数学归纳法来证明下面二个等式，又令 $P_i(k,x)$ 为 x 的 k 次有理多项式，其中 $3<i<6$，

$$(n+1)^{2k}+n^{2k}-1-2k\bar{n}=\bar{n}^2P_3(k-2,\bar{n}),\quad (k>2) \tag{5}$$

$$(n+1)^{2k+1}+n^{2k+1}-2n-1=\bar{m}\bar{n}P_4(k-1,\bar{n}) \tag{6}$$

当 $k=2$ 时，我们有

$$(n+1)^4+n^4-1-4\bar{n}=n^4+4n^3+6n^2+4n+1+n^4-1-4\bar{n}=2n^4+4n^3+2n^2+4n^2+4n-$$
$$-4\bar{n}=2n^2(n+1)^2+4n(n+1)-4\bar{n}=2\bar{n}^2$$

即（5）式对 $k=2$ 成立。现在我们假设（5）式当 $k=2,\cdots,l$ 时成立，则当 $k=l+1$ 时，我们有

$$(n+1)^{2(l+1)}+n^{2(l+1)}-1-2(l+1)\bar{n}$$
$$=(n+1)^{2l}(n+1)^2+n^{2l}n^2-1-2l\bar{n}-2\bar{n}$$
$$=(n+1)^{2l}\big((n+1)n+(n+1)\big)+n^{2l}\big(n(n+1)-n\big)-1-2l\bar{n}-2\bar{n}$$
$$=\bar{n}(n+1)^{2l}+(n+1)(n+1)^{2l}+\bar{n}n^{2l}-nn^{2l}-1-2l\bar{n}-2\bar{n}$$
$$=\bar{n}[(n+1)^{2l}+n^{2l}-1-2l\bar{n}]+\bar{n}+2l\bar{n}^2+n(n+1)^{2l}+(n+1)^{2l}-nn^{2l}-1-2l\bar{n}-2\bar{n}$$
$$=\bar{n}\cdot\bar{n}^2P_3(l-2,\bar{n})+2l\bar{n}^2+[(n+1)^{2l}+n^{2l}-1-2l\bar{n}]+n(n+1)^{2l}-n^{2l}-nn^{2l}-\bar{n}$$
$$=\bar{n}^2[\bar{n}P_3(l-2,\bar{n})+2l+P_3(l-2,\bar{n})]+\bar{n}[(n+1)^{2l-1}-n^{2l-1}-1]$$

于是我们只须在归纳假设的条件下去证明

$$(n+1)^{2l-1}-n^{2l-1}-1=\bar{n}P_5(l-2,\bar{n}) \tag{7}$$

我们再使用归纳法来证明（7）式：当 $l=2$ 时，由于

$$(n+1)^3-n^3-1=3n^2+3n=3\bar{n}$$

故（7）式对 $l=2$ 成立。假设（7）式对 $l-1(l\geqslant 3)$ 成立，即

$$(n+1)^{2l-3}-n^{2l-3}-1=\bar{n}P_5(l-3,\bar{n})$$

则由上式和（5）式的归纳假设，我们有

$$\begin{aligned}(n+1)^{2l-1}-n^{2l-1}-1&=(n+1)^{2l-2}(n+1)-n^{2l-2}[(n+1)-1]-1\\&=\bar{n}(n+1)^{2l-3}+(n+1)^{2l-2}-\bar{n}n^{2l-3}+n^{2l-2}-1\\&=\bar{n}[(n+1)^{2l-3}-n^{2l-3}-1]+\bar{n}+[(n+1)^{2l-2}+n^{2l-2}-1-2(l-1)\bar{n}]+2(l-1)\bar{n}\\&=\bar{n}\cdot\bar{n}P_5(l-3,\bar{n})+\bar{n}^2P_3(l-3,\bar{n})+(2l-1)\bar{n}\end{aligned}$$

故（7）式对 l 也成立，于是（5）式得证。

现在我们来证明（3）式：由（1）和（5）式有

$$2\sum_{i=2}^{k}\binom{2k}{2i-1}S_{2i-1}(n)=(n+1)^{2k}+n^{2k}-1-2k\bar{n}=\bar{n}^2P_3(k-2,\bar{n})\tag{8}$$

当 $k=2$ 时由（8）式有 $8S_3(n)=\bar{n}^2P_3(0,\bar{n})$，故（3）式对 $k=2$ 成立。若（3）式对 $k=2,\cdots,l$ 皆成立，则当 $k=l+1$ 时，由（8）式我们有

$$2\sum_{i=2}^{l+1}\binom{2l+2}{2i-1}S_{2i-1}(n)=\bar{n}^2P_3(l-1,\bar{n})$$

即

$$\begin{aligned}2\binom{2l+2}{2l+1}S_{2l+1}(n)&=\bar{n}P_3(l-1,\bar{n})-2\sum_{i=2}^{l}\binom{2l+2}{2i-1}S_{2i-1}(n)\\&=\bar{n}^2P_3(l-1,\bar{n})-2\sum_{i=2}^{l}\binom{2l+2}{2i-1}P_1(i-2,\bar{n})\bar{n}^2\\&=\bar{n}^2[P_3(l-1,\bar{n})-2\sum_{i=2}^{l}\binom{2l+2}{2i-1}P_1(i-2,\bar{n})]\end{aligned}$$

故（3）式对 $l+1$ 仍成立，因而（3）式得证。

下面我们来证明（6）式：当 $k=1$ 时，由于

$$\begin{aligned}(n+1)^{2+1}+n^{2+1}-2n-1&=[(n+1)+n][(n+1)^2-n(n+1)+n^2]-(2n+1)\\&=(2n+1)(2n^2+2n+1-\bar{n}-1)=\overline{m}[2n(n+1)-\bar{n}]=\overline{m}\bar{n},\end{aligned}$$

故（6）式当 $k=1$ 时成立。现在假设（6）式对 $k=1,\cdots,l$ 成立，则当 $k=l+1$ 时有

$$\begin{aligned}&(n+1)^{2(l+1)+1}+n^{2(l+1)+1}-2n-1\\&=(n+1)^{2l+1}[n(n+1)+(n+1)]+n^{2l+1}[n(n+1)-n]-(2n+1)\\&=\bar{n}[(n+1)^{2l+1}+n^{2l+1}-\overline{m}]+\bar{n}\overline{m}+n(n+1)^{2l+1}+(n+1)^{2l+1}-n^{2l+2}-\overline{m}\\&=\bar{n}\cdot\overline{m}\bar{n}P_4(l-1,\bar{n})+\overline{m}\bar{n}+[(n+1)^{2l+1}+n^{2l+1}-\overline{m}]+\bar{n}(n+1)^{2l}-n^{2l+1}-n^{2l+2}\\&=\overline{m}\bar{n}[\bar{n}P_4(l-1,\bar{n})+1]+\overline{m}\bar{n}P_4(l-1,\bar{n})+\bar{n}[(n+1)^{2l}-n^{2l}]\end{aligned}$$

于是我们只须在归纳假设的条件下去证明

$$(n+1)^{2l}-n^{2l}=\overline{m}P_6(l-1,\bar{n})\tag{9}$$

当 $l=1$ 时，由于 $(n+1)^2-n^2=2n+1=\overline{m}$，故（9）式对 $l=1$ 成立，若（9）式对 $l-1$ $(l\geqslant 2)$ 成立，则由（6）式和（9）式的归纳假设，对 l 我们有

$$\begin{aligned}(n+1)^{2l}-n^{2l}&=(n+1)^{2l-1}(n+1)-n^{2l-1}[(n+1)-1)\\&=n(n+1)^{2l-1}+(n+1)^{2l-1}-n^{2l-1}(n+1)+n^{2l-1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \bar{n}[(n+1)^{2l-2} - n^{2l-2}] + [(n+1)^{2l-1} + n^{2l-1} - \bar{m}] + \bar{m} \\
&= \bar{n}\cdot\bar{m}P_6(l-2,\bar{n}) + \bar{m}\bar{n}P_4(l-2,\bar{n}) + \bar{m} \\
&= \bar{m}\,[\bar{n}P_6(l-2,\bar{n}) + \bar{n}P_4(l-2,\bar{n}) + 1]
\end{aligned}
$$

即（9）式对 l 也成立。从而（6）式得证。

由于（2）和（6）式，我们有

$$
2\sum_{i=1}^{k}\binom{2k+1}{2i} S_{2i}(n) = (n+1)^{2k+1} + n^{2k+1} - \bar{m} = \bar{m}\bar{n}P_4(k-1,\bar{n}) \tag{10}
$$

当 $k=1$ 时，由于 $2\binom{2+1}{2}S_2(n) = (n+1)^3 + n^3 - \bar{m} = 2n^2(n+1) + n(n+1) = 2n\bar{n} + \bar{n} =$ $= \bar{m}\bar{n}$，故（4）式当 $k=1$ 时成立。现在假定（4）式对 $k=1,\cdots,l$ 时成立，则当 $k=l+1$ 时由（10）式有

$$
2\sum_{i=1}^{l+1}\binom{2(l+1)+1}{2i} S_{2i}(n) = \bar{m}\bar{n}P_4(l,\bar{n})
$$

即

$$
\begin{aligned}
2\sum\binom{2l+3}{2l+2} S_{2(l+1)}(n) &= \bar{m}\bar{n}P_4(l,\bar{n}) - 2\sum_{i=1}^{l}\binom{2l+3}{2i} S_{2i}(n) = \bar{m}\bar{n}P_4(l,\bar{n}) - \\
&- 2\sum_{i=1}^{l}\binom{2l+3}{2i}\bar{m}\bar{n}P_2(i-1,\bar{n}) = \bar{m}\bar{n}[P_4(l,\bar{n}) - 2\sum_{i=1}^{l}\binom{2l+3}{2i}P_2(i-1,\bar{n})]
\end{aligned}
$$

显然，括号里是 $\bar{n}$ 的 l 次有理多项式，故（4）式对 $k=l+1$ 也成立，因而（4）得证。至此，定理证毕。

参 考 文 献

〔1〕罗见今，李善兰对 Stirling 数和 Euler 数的研究，数学研究与评论，Vol.2.№4 (1982)，173—182.

〔2〕陈景润与黎鉴愚（Chen Jing-run and Li Jian-yu），On the sum of kth powers of the first n integers，科学通报英文版的编辑部已通知同意发表。

〔2〕陈景润与黎鉴愚，关于自然数前 n 项幂的和，厦门大学学报，Vol.23 No2 (1984).

〔4〕陈景润与黎鉴愚，关于自然数前 n 项幂的和（Ⅱ），已投到厦门大学学报.

〔5〕Rordan. J., Combinatorial Identities, N w York(1968), 160.

〔6〕Paul. J. L., On the Sum of the kth powers of the first n integers, Math. Reviews, Vol. 43 No.4 April (1972).

〔7〕Gupta. S. L., An identity involving the sum of the kth power of the first n natur.al numbers, Math. Gazette, 56(1972), 128—129.

〔8〕Sharkey. M. J. A., An identity involving the sum of powers., Math Gazette., 57(1973), 131—133.

〔9〕Gould. H. W., Sums of powers integer, Number, Thery Class Notes, Part I, West Virgi nia University(1974—1975), 3—4.

〔10〕Turner. B., Sums of powers of integers via the binomial theorem, Math, Reviews, Vol. 62, No. 4 October(1981).

〔11〕Scott. S. H., Sums of powers of natunal numbers by coefficient opera-

tion, Math. Gazette, 64(1980), 231—239.
〔12〕Schultz. H. T., The sum of the kth powers of the first n integers, Math. Reviews, Vol. 63 No. 3, March(1982).

A 类零壹矩阵的基的一些定理*

杨安洲　　　　李　浩

（北工大数学系）　（秦皇岛冶金地质进修学院）

定义 1　令 $n\geqslant 3$，$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$_{j}=1$ 或 0，对任固定的 $i(1\leqslant i\leqslant n)$ 存在唯一的一个 $j_0(1\leqslant j_0\leqslant n)$ 使得 $a_{ij_0}=1$，其余的 $a_{ij}=0\,(j\neq j_0, 1\leqslant j\leqslant n)$，则称（0,1）一矩阵 A 为 **A** 型的矩阵。

显然 **A** 型矩阵在矩阵乘法运算下成为一个具有单位元的半群。

定理 2　令 $\mathbf{A}=\{A: A$ 是 n 级的 **A** 型矩阵$\}$，$\mathbf{B}\subseteq\mathbf{A}$，若对任 A　**A** 总存在有 $B_1, B_2, \cdots$ B_k　**B** 使得 $A=B_1B_2\cdots B_k$，则称 **B** 为 **A** 的一个基。

定理 1　$n\geqslant 3$，$B_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & O \\ & & \ddots & \ddots & \\ O & & & & \\ 1 & & & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$　$B_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & O \\ O & & O \end{pmatrix}_{n\times n}$，

$B_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & & O & \\ & & 1 & & \\ & O & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$，则 $\{B_1, B_2, B_3\}$ 是 **A** 的一个基。

定理 2　$n\geqslant 3$，若 **B** 是 **A** 的一个基，则 $|\mathbf{B}|\geqslant 3$。

定理 3　$n\geqslant 3$，$\min\{|\mathbf{B}|: \mathbf{B}$ 是 **A** 的基$\}=3$。

* 1985年 9 月20日收到。