Brualdi-Anstee猜想的反例

陈 永 川

（四川大学数学系）

1980年，Brualdi和Anstte独立地提出了下述

猜想：设R, $\vec{R}$, S, $\vec{S}$是非负整向量，则存在矩阵$A\in u(R,S)$, $B\in u(\vec{R},\vec{S})$使$A+B\in u(R+\vec{R},S+\vec{S})$的充要条件是$u(R,S)$, $u(\vec{R},\vec{S})$和$u(R+\vec{R},S+\vec{S})$均非空。

下例表明，一般情况下这一猜想并非成立。

例：设$R=(2,1,0)$, $S=(2,1,0)$;

$\vec{R}=(0,2,1)$, $\vec{S}=(1,0,2)$;

则$R+\vec{R}=(2,3,1)$, $S+\vec{S}=(3,1,2)$;

容易验证，此时$u(S,R)$, $u(\vec{S},\vec{R})$和$u(R+\vec{R},S+\vec{S})$均非空且各类分别只含一一个矩阵。它们是

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

显然$A+B\neq C$故Brualdi－Anstee猜想不成立。

基于上例和矩阵的分块考虑，我们也可以构造出相应的高维矢量和矩阵使得所述猜想不成立；同时亦可证明，任何使得上述猜想不成立的三维矩阵均可在行列换序手续下化化为上面所述的例子。

参 考 文 献

R. A. Brualdi, Linear Algebra & Appl. 33(1980), 159－231 .

* 1985年3月30日收到。