1986年3月

数学研究与评论
第六卷 第一期

关于Liénard方程极限环唯二性定理的一点注记*

王 裕 民

(武汉大学)

Гычков Г.С，〔2〕首先证明了一个关于Lienard方程极限环的唯二性定理。张芷芬〔1〕对定理的条件作了较大改进，提出了更弱的条件。本文进一步减弱了〔1〕的条件，去掉了对称性$F(-x)=-F(x)$的要求，减弱了原条件3）。

考虑微分方程

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+x=0 \tag{1}$$

或其等价方程组

$$\frac{dx}{dt}=y-F(x),\quad \frac{dy}{dt}=-x \tag{2}$$

其中$F(x)=\int_0^x f(x)dx$

设L_A为（2）的一条闭轨线，L_A与等倾线$y=F(x)$交于点$A(x_A, F(x_A))$和$\overline{A}(x_{\overline{A}}, F(x_{\overline{A}}))$，$x_{\overline{A}}<0<x_A$，以$y=y_A(x)$和$y=\overline{y}_A(x)$分别表示$L_A$位于等倾线$y=F(x)$下方和上方的弧段，则易见有

$$\oint_{L_A} f(x)dt=\int_{x_{\overline{A}}}^{x_A}\left[\frac{f(x)}{F(x)-y_A(x)}+\frac{f(x)}{\overline{y}_A(x)-F(x)}\right]dx \tag{3}$$

记
$$D_a(x)=\frac{(F(x)-F(a))f(x)}{x}$$

引理1，若存在$a\geqslant 0$，使得$f(x)>0$（$f(x)<0$）当$x>a$成立，且$Da(x)$在$x>a$上不减，则

$$\int_a^{x_A}\left(\frac{f(x)}{F(x)-y_A(x)}+\frac{f(x)}{\overline{y}_A(x)-F(x)}\right)dx \underset{(\geqslant)}{\leqslant}$$

$$\int_a^{x_B}\left(\frac{f(x)}{F(x)-y_A(x)}+\frac{f(x)}{\overline{y}_A(x)-F(x)}\right)dx,\quad a<x_A<x_B。$$

引理1′ 若存在$a'\leqslant 0$，使$f(x)>0$（$f(x)<0$）当$x<a'$，且$Da'(x)$在$x<a'$上不减，

* 1982年2月23日收到。

则

$$\int_{x_{\bar{A}}}^{a'}\left(\frac{f(x)}{F(x)-y_A(x)}+\frac{f(x)}{\overline{y_A}(x)-F(x)}\right)dx \underset{(\geqslant)}{\leqslant}$$

$$\int_{x_{\bar{B}}}^{a'}\left(\frac{f(x)}{F(x)-y_B(x)}+\frac{f(x)}{\overline{y_{\bar{B}}}(x)-F(x)}\right)dx,\quad x_{\bar{B}}<x_{\bar{A}}<a'.$$

引理 1， 1′的证明见〔5〕

引理 2 设有$x_2>x_1\geqslant 0$,使$F(x)\geqslant F(x_2)$ （$F(x)\leqslant F(x_2)$）当$x_1\leqslant x\leqslant x_2$，则

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f(x)}{F(x)-y_A(x)}+\frac{f(x)}{\overline{y_A}(x)-F(x)}\right)dx \underset{(\geqslant)}{\leqslant}$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f(x)}{F(x)-y_B(x)}+\frac{f(x)}{\overline{y_B}(x)-F(x)}\right)dx,\ x_2<x_A<x_B。$$

证．反证括号外结论。

由 $0<F(x)-y_A(x)<F(x)-y_B(x)$ 当$x_1\leqslant x\leqslant x_2$

得

$y'_A(x)=\dfrac{x}{F(x)-y_A(x)}>\dfrac{x}{F(x)-y_B(x)}=y'_B(x)$， $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ 再注意到条件$F(x)\geqslant F(x_2)$ 当$x_1\leqslant x\leqslant x_2$，易见有

$\dfrac{y'_A(x)}{F(x)-y_A(x)}-\dfrac{y'_B(x)}{F(x)-y_B(x)}\leqslant\dfrac{y'_A(x)}{F(x_2)-y_A(x)}-\dfrac{y'_B(x)}{F(x_2)-y_B(x)}$, $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ 注

于是

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{F'(x)dx}{F(x)-y_A(x)}-\int_{x_1}^{x_2}\frac{F'(x)dx}{F(x)-y_B(x)}$$

$$=\left(\ln\frac{F(x_2)-y_A(x_2)}{F(x_1)-y_A(x_1)}+\int_{x_1}^{x_2}\frac{y'_A(x)dx}{F(x)-y_A(x)}\right)-$$

$$-\left(\ln\frac{F(x_2)-y_B(x_2)}{F(x_1)-y_B(x_1)}+\int_{x_1}^{x_2}\frac{y'_B(x)dx}{F(x)-y_B(x)}\right)$$

$$=\ln\frac{F(x_2)-y_A(x_2)}{F(x_1)-y_A(x_1)}-\ln\frac{F(x_2)-y_B(x_2)}{F(x_1)-y_B(x_1)}+$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{y'_A(x)}{F(x)-y_A(x)}-\frac{y'_B(x)}{F(x)-y_B(x)}\right)dx$$

$$<\ln\frac{F(x_2)-y_A(x_2)}{F(x_1)-y_A(x_1)}-\ln\frac{F(x_2)-y_B(x_2)}{F(x_1)-y_B(x_1)}+$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{y'_A(x)}{F(x_2)-y_A(x)}-\frac{y'_B(x)}{F(x_2)-y_B(x)}\right)dx$$

$$=\ln\frac{F(x_2)-y_A(x_2)}{F(x_1)-y_A(x_1)}-\ln\frac{F(x_2)-y_B(x_2)}{F(x_1)-y_B(x_1)}-$$

则若L包含点$D(x_1,0)$和$\overline{D}(x_1',0)$之一于其内，亦必也包含另一点于其内。

证 设过点D的（2）的轨线$f(D,t)$负向延续与y轴交于点$C(0,y_C)$，$y_C>0$，作

$$\lambda_1(x,y)=\frac{x^2+(y-M)^2}{2},$$

注意到$f(x)<0$当$a<x<x_1$，有

$$\left.\frac{d\lambda_1}{dt}\right|_{(2)}=x(M-F(x))\geqslant 0 \qquad 当0\leqslant x\leqslant x_1$$

我们用$\lambda_1(P)$记$\lambda_1(x,y)$在点P处的值，则$\lambda_1(D)>\lambda_1(C)$。可得$y_C<M+\sqrt{x_1^2+M^2}$

设闭轨L含点$\overline{D}$于其内，L与直线$x=x_1'$及y轴交于点F，E_1如图作

作 $\lambda_2(x,y)=\frac{x^2+(y-N)^2}{2}$，注意到$f(x)<0$当$x_1'<x<a'$，有

$$\left.\frac{d\lambda_2}{dt}\right|_{(2)}=x(N-F(x))>0,\ x_1'\leqslant x\leqslant 0$$

故$\lambda_2(E_1)>\lambda_2(F)$，且$y_{E_1}>N+\sqrt{x_1'^2+(y_F-N)^2}>N+\sqrt{x_1'^2+N^2}$

由条件ii，得$y_{E_1}>y_C$，从而由唯一性可知，L必含点$D(x_1,0)$于其内。

设（2）之闭轨L含D点于其内，由条件ii）类似可证L必含点$\overline{D}$于其内。引理证毕。

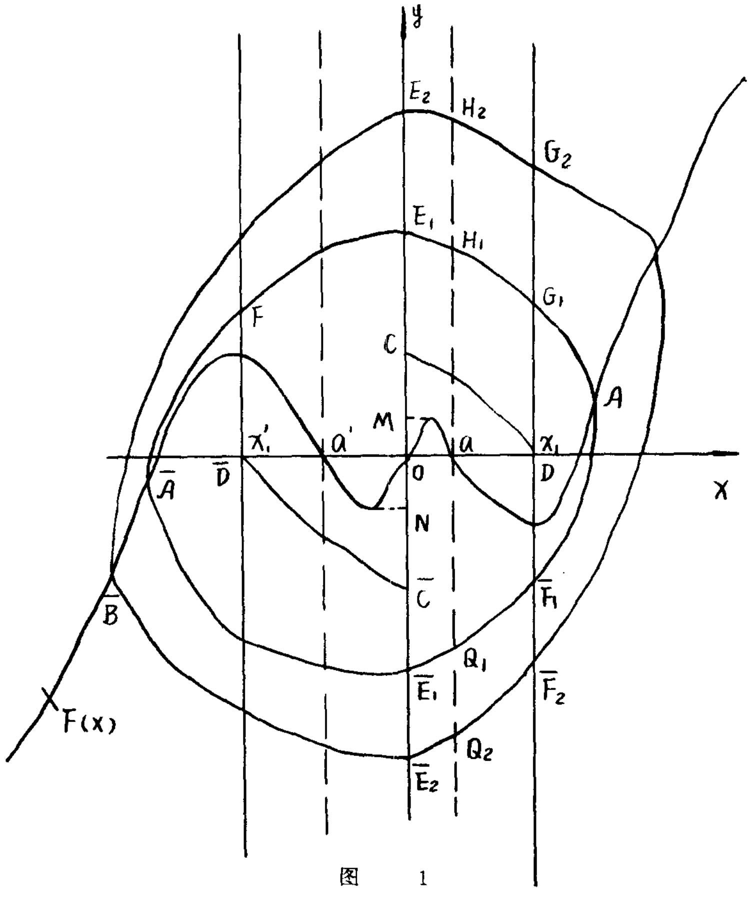

图 1

$$+\ln\frac{F(x_2)-y_A(x_2)}{F(x_2)-y_A(x_1)}+\ln\frac{F(x_2)-y_B(x_2)}{F(x_2)-y_B(x_1)}$$

$$=\ln\frac{F(x_2)-y_A(x_1)}{F(x_1)-y_A(x_1)}-\ln\frac{F(x_2)-y_B(x_1)}{F(x_1)-y_B(x_1)}$$

$$=\ln\left(1+\frac{F(x_2)-F(x_1)}{F(x_1)-y_A(x_1)}\right)-\ln\left(1+\frac{F(x_2)-F(x_1)}{F(x_1)-y_B(x_1)}\right)\leqslant 0\text{。}$$

所以 $\int_{x_1}^{x_2}\frac{F'(x)\mathrm{d}x}{F(x)-y_A(x)}\leqslant\int_{x_1}^{x_2}\frac{F'(x)\mathrm{d}x}{F(x)-y_B(x)}$.

类似地可证

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{f(x)\mathrm{d}x}{\overline{y}_A(x)-F(x)}\leqslant\int_{x_1}^{x_2}\frac{f(x)}{\overline{y}_B(x)-F(x)}$$

引理结论证毕。

注 对于任一固定的$x\in[x_1,x_2]$，考虑以F为变量的简单函数

$$\frac{y'_A(x)}{F-y_A(x)}-\frac{y'_B(x)}{F-y_B(x)},\quad F>y_A(x)>y_B(x)$$

有

$$\frac{\partial}{\partial F}\left(\frac{y'_A(x)}{F-y_A(x)}-\frac{y'_B(x)}{F-y_B(x)}\right)=-\frac{y'_A(x)}{(F-y_A(x))^2}+\frac{y'_B(x)}{(F-y_B(x))^2}<0,$$ 这是

因为 $0<F-y_A(x)<F-y_B(x)$， $y'_A(x)>y'_B(x)>0$.

而$F(x)\geqslant F(x_2)$ 当$x_1\leqslant x\leqslant x_2$，故

$$\frac{y'_A(x)}{F(x)-y_A(x)}-\frac{y'_B(x)}{F(x)-y_B(x)}\leqslant\frac{y'_A(x)}{F(x_2)-y_A(x)}-\frac{y'_B(x)}{F(x_2)-y_B(x)}$$

对左半平面情况，有类似结论：

引理2′ 设有$x'_2<x'_1\leqslant 0$ ，使$F(x)\leqslant F(x'_2)$($F(x)\geqslant F(x'_2)$) 当$x'_2\leqslant x\leqslant x'_1$，则

$$\int_{x'_2}^{x'_1}\left(\frac{f(x)}{F(x)-y'_A(x)}+\frac{f(x)}{\overline{y}_{A'}(x)-F(x)}\right)\mathrm{d}x\underset{(\geqslant)}{\leqslant}$$
$$\int_{x'_2}^{x'_1}\left(\frac{f(x)}{F(x)-y_{B'}(x)}+\frac{f(x)}{\overline{y}_{B'}(x)-F(x)}\right)\mathrm{d}x,\ x_{B'}<x_{A'}<x'_2$$

式的证明。

引理3，设L是（2）的闭轨，记

$M=\max\{F(x)|0\leqslant x\leqslant a\}$， $N=\min\{F(x)|a'\leqslant x\leqslant 0\}$

若$f(x)\in C$，存在$x'_1<a'<0<a<x_1$，使得

i) $F(x)x\geqslant 0$ 当$a'<x<a$，但$F(x)\not\equiv 0$ 当$|x|\ll 1$；

$f(x)(x_1-x)<0$ 当$x>a$，$f(x)(x'_1-x)>0$ 当$x<a$；

ii) $|M-N|\leqslant|\sqrt{x_1^2+M^2}-\sqrt{x_1'^2+N^2}|$

定理　考虑微分方程组（2），设$f(x)\in C^0$，存在$x_1'<a'<0<x_1$，使得

i）$F(x)x\geqslant 0$当$a'<x<a$，但$F(x)\not\equiv 0$当$|x|\ll 1$；$f(x)(x_1-x)<0$当$x>a$，$f(x)(x_1'-x)>0$当$x<a'$；存在$a'<0<a$使$f(x)<0$当$a<x<x_1$和$x_1'<x<a'$，且$\max\{a, |a'|\}\leqslant\min\{a, |a'|\}$；

ii）$D_{x_1}(x)\searrow$当$x>x_1$，$D_{x_1'}(x)\nearrow$当$x<x_1'$；

iii）$|M-N|\leqslant|\sqrt{x_1^2+M^2}-\sqrt{x_1'^2+N^2}|$；

iV）$F(x_1)\leqslant 0$ $F(x_1')\geqslant 0$，

则方程组（2）至多有二个极限环。

证：由曾宪武〔3〕存在唯一性定理一文中定理2知，在$x_1'\leqslant x\leqslant x_1$内方程（1）至多有一个环。

由引理3知，若（2）的闭轨线L与直线$x=x_1$，$x=x_1'$之一相交，则必与另一直线也相交。

设L_1、L_2为（2）的闭轨，$L_2\supset L_1$且它们同时与直线$x=x_1$和$x=x_1'$相交，不失一般性，可设$F(a)=F(a')=0$

由引理1有$\int_{\widehat{G_2B\bar{F}_2}}f(x)dt>\int_{\widehat{G_1A\bar{F}_1}}f(x)dt$，由引理2有$\int_{\widehat{E_2H_2}}f(x)dt>\int_{\widehat{E_1H_1}}f(x)dt$

$$\int_{\widehat{Q_2\bar{E}_2}}f(x)dt>\int_{\widehat{Q_1\bar{E}_1}}f(x)dt,$$

又易知$\int_{\widehat{H_2G_2}}f(x)dt>\int_{\widehat{H_1G_1}}f(x)dt$，$\int_{\widehat{\bar{F}_1Q_1}}f(x)dt>\int_{\widehat{\bar{F}_2Q_2}}f(x)dt$，

综上有$\int_{\widehat{E_2B\bar{E}_1}}f(x)dt>\int_{\widehat{E_1A\bar{E}_2}}f(x)dt$。

类似可证在左半平面上有$\int_{\widehat{\bar{E}_2\bar{B}E_2}}f(x)dt>\int_{\widehat{\bar{E}_1\bar{A}E_1}}f(x)dt$，故有$\oint_{L_2}f(x)dt>\oint_{L_1}f(x)dt$。（4）

此即〔1〕中的（4）式，余下部分的证明，与文〔1〕相同。定理证毕。

参考文献

〔1〕张芷芬：数学学报，Vol，24，№5（1981）。

〔2〕Рычков Г.С.Дифференц уравнения，11：2（1975）

〔3〕曾宪武：数学学报，Vol．21，№3（1978）．

〔4〕黄克成：华东水利学院学报，1（1979）。

〔5〕王裕民：“Liénard方程极限环的一个唯一性定理”。待发表。