

对角化与同时对角化 (II)*

杨 安 洲

(北工大数学系)

定理 1 A 在共轭转置变换下可对角化 $\Leftrightarrow A$ 与 A^* (即 $\overline{A'}$) 在共轭转置变换下同时可对角化。

定理 2 $C = \{A_i: i \in I \text{ 且所有的 } A_i \text{ 均为同阶的方阵}\}$ 在共轭转置变换下同时可对角化 $\Leftrightarrow C \cup C^*$ 在共轭转置变换下同时可对角化 ($C^* = \{A_i^*: A_i \in C\}$)。

定理 3 $(\forall D \subseteq C)(D \cup (C - D))^*$ 在共轭转置变换下同时可对角化 $\Leftrightarrow (\exists D \subseteq C)(D \cup (C - D)^*$ 在共轭转置变换下同时可对角化)。

定理 4 C 在共轭转置变换下同时可对角化 $\Leftrightarrow (\exists D \subseteq C)(D \cup (C - D)^*$ 在共轭转置变换下同时可对角化)。

定理 5 令 $I = J \cup K$, $J \cap K = \phi$ (空), H 表示由所有的正定的 Hermite 方阵所组成的集合, 则有 $(\exists H \in H)((\exists i \in I)(A_i H A_i^* = A_i^* H A_i) \& (\exists i, j \in I)(i \neq j \rightarrow A_i H A_j = A_j H A_i)) \Leftrightarrow (\exists H \in H)(\exists i \in I)(A_i H A_i^* = A_i^* H A_i) \& (\exists i, j \in I)(i \neq j \rightarrow (A_i H A_j = A_j H A_i \& A_i H A_j^* = A_j^* H A_i)) \Leftrightarrow (\exists H \in H)((\exists i \in I)(A_i H A_i^* = A_i^* H A_i) \& (\exists i \in J \ j \in J \ k \in K \ l \in K)((A_j H A_k^* = A_k^* H A_j) \& (i \neq j \rightarrow A_i H A_j = A_j H A_i) \& (k \neq l \rightarrow A_k^* H A_l^* = A_l^* H A_k^*)) \Leftrightarrow (\exists H \in H)((\exists i \in I)(A_i H A_i^* = A_i^* H A_i) \& (\exists i \in J \ j \in J \ k \in K \ l \in K)((A_j H A_k^* = A_k^* H A_j \& A_j H A_k = A_k H A_j) \& (i \neq j \rightarrow (A_i H A_j = A_j H A_i \& A_i H A_j^* = A_j^* H A_i)) \& (k \neq l \rightarrow (A_k H A_l = A_l H A_k \& A_k H A_l^* = A_l^* H A_k^*)))))$ 。

定理 6 方程组 $(E_1): ((1) A_i X A_i^* = A_i^* X A_i (\exists i \in I) \text{ 与 } (2) A_i X A_j = A_j X A_i (\exists i, j \in I, i \neq j))$ 有解是正定的 Hermite 方阵 $X = H \in H \Leftrightarrow$ 方程组 $(E_2): ((1) \text{ 与 } (2) \text{ 与 } (3). A_i X A_j^* = A_j^* X A_i (\forall i, j \in I, i \neq j))$ 有解是正定的 Hermite 方阵 $X = H \in H \Leftrightarrow$ 方程组 $(E_3): ((1) \text{ 与 } (4)、(5)、(6))$ 有解是正定的 Hermite 方阵 $X = H \in H \Leftrightarrow$ 方程组 $(E_4 (E_4): ((1) \text{ 与 } (7)、(8)、(9)、(10)、(11)、(12))$ 有解是正定的 Hermite 方阵 $X = H \in H$, 其中 (12) — (4) 就是定理 5 中从最后往上数的 9 个等式中将 H 换成 X 后所得的方程组 (注: 数的时候暂时去掉等式 $A_i H A_i^* = A_i^* H A_i$)。

参 考 文 献

杨安洲, 方阵在共轭转置变换下的对角化与同时对角化, 待发表。

* 1985年7月10日收到。