关于具多项式系数的线性偏微分方程解的光滑性

安 纺 山

（兰州师专）

〔提要〕§1定义了两类非正规的拟微分算子，并讨论了它们的映射性质；§2引进$\mathscr{E}$-亚椭园性、$\mathscr{S}$-亚椭园性及$\mathscr{D}$-亚椭园性的概念，用以描述线性偏微分方程$P(x,D)u=f$的解的条件光滑性质，并对常系数情形得到了$\mathscr{S}$-亚椭园性的条件；§3专门讨论具多项式系数的方程，收到了$\mathscr{D}$-亚椭园性的某些充分条件。

§1 非正规拟微分算子

考虑拟微分算子

$$Au(x)=\iint e^{i(x-y)\xi}a(x,y,\xi)u(y)\,dyd\xi, \tag{1.1}$$

其中$a(x,y,\xi)\in C^{\infty}(X\times X\times R^n)$，X为$R^n$中域。特别地，若对$X\times X$中任意紧集K、成立估计$|\partial_x^{\beta}\partial_y^{\gamma}\partial_{\xi}^{\alpha}a(x,y,\xi)|\leqslant C_{\alpha,\beta,\gamma,K}\langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta+\gamma|}$，$(x,y)\in K$，$\xi\in R^n$ (1.2)

则证$a(x,y,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}(X)$，$A\in L^m_{\rho,\delta}(X)$。通常我们要求（1.2）中的常数$\rho$，$\delta$满足条件 $0\leqslant\delta<\rho\leqslant1$。关于这类算子的基本的研究例如可参见〔1〕或者〔2〕。

设（1.1）中的幅函数$a(x,y,\xi)$与y无关，则我们可把（1.1）改写为

$$Au(x)=\int e^{ix\xi}a(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,d\xi。\tag{1.3}$$

当A是适算子时，取$a(x,\xi)$为A的符征，则A总是可表为（1.3）的形式的。设$X=R^n$，并将条件（1.2）改换为

$$|\partial_x^{\beta}\partial_{\xi}^{\alpha}a(x,\xi)|\leqslant C_{\alpha,\beta}\langle x\rangle^{l(\alpha,\beta)}\langle\xi\rangle^{m(\alpha,\beta)}, \tag{1.4}$$

其中$l(\alpha,\beta)$，$m(\alpha,\beta)$是α，β的实值函数。我们把定义如（1.3）且满足（1.4）的拟微分算子称为是非正规的，以便于与前面描述的$L^m_{\rho,\delta}$中算子相区别。注意（1.4）中常数$C_{\alpha,\beta}$与$x\in R^n$无关，由此易知，非正规拟微分算子并不完全包含$L^m_{\rho,\delta}(R^n)$中算子。但本文所要考虑的具多项式系数的线性偏微分算子（包括常系数微分算子）却既是非正规的，又是$L^m_{1,0}(R^n)$中的。

定理1.1 设A是非正规的拟微分算子，则A定义了$C_0^{\infty}(R^n)$到$C^{\infty}(R^n)$的连续线性映相，并可延拓为$\mathscr{E}'(R^n)$到$\mathscr{D}'(R^n)$的连续线性映相。

证明 设$u\in C_0^{\infty}(R^n)$，则$\hat{u}\in\mathscr{S}(R^n)$。由此并据（1.4），易知（1.3）及其各阶导数在任意紧集$K\subset R^n$上都是绝对一致收敛的，故$Au\in C^{\infty}(R^n)$。注意Fourier变换乃是$C_0^{\infty}(R^n)$到$\mathscr{S}(R^n)$的连续性映相，$\hat{u}$在$\mathscr{S}(R^n)$中的半范由u在$C_0^{\infty}(R^n)$中半范所决定，而在任意紧集K上，Au及其各阶导数显然被由$\hat{u}$在$\mathscr{S}(R^n)$中的半范所决定的常数界定，由此即知映相是连续的。线性亦是显然的。定理的第一个断言得证。

现在考虑A的转置${}^tA$：

$$^tAv(x)=\int e^{-ix\xi}a(x,-\xi)\hat{u}(\xi)d\xi。$$

与上面完全一样地可证明，^tA定义了$C_0^\infty(R^n)$到$C^\infty(R^n)$的连续线性映相。由双线性偶合

$$\langle Au,v\rangle=\langle u,{}^tAv\rangle,$$

我们立即可得到定理的第二个断言。

条件（1.4）又可改换为

$$|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)|\leqslant C_{\alpha,\beta}\langle x\rangle^l\langle\xi\rangle^{m(x,\beta)},\tag{1.5}$$

其中l是与α,β无关的固定常数，$m(\alpha,\beta)$是α,β的实值函数。我们把定义如（1.3）且满足（1.5）的非正规拟微分算子称为是第一类的。

定理1.2 设A是第一类的非正规拟微分算子，则A定义了$\mathscr{S}(R^n)$到$\mathscr{S}(R^n)$的连续线性映相，并可延拓为$\mathscr{S}'(R^n)$到$\mathscr{S}'(R^n)$的连续线性映相。

证明：若$\hat{u}\in\mathscr{S}(R^n)$，则$a\in\mathscr{S}(R^n)$，由定理1.1 的证明知，$Au(x)\in C^\infty(R^n)$。利用公式

$$e^{ix\xi}=\langle x\rangle^{-2N}\langle D_\xi\rangle^{2N}e^{ix\xi}$$

在（1.3）中作分部积分，得到

$$\begin{aligned}|Au(x)|&=\langle x\rangle^{-2N}\left|\int e^{ix\xi}\langle D_\xi\rangle^{2N}(a(x,\xi)\hat{u}(\xi))đ\xi\right|\\&=\langle x\rangle^{-2N+l}\left|\int e^{ix\xi}\langle x\rangle^{-l}\langle D_\xi\rangle^{2N}(a(x,\xi)\hat{u}(\xi))đ\xi\right|,\end{aligned}$$

由（1.15）及$\hat{u}\in\mathscr{S}(R^n)$的性质知，上式右端绝对值号间的积分囿于一与$x$无关的常数，即

$$|Au(x)|\leqslant C_N\langle x\rangle^{-2N+l}$$

故知当$x\to\infty$时，$Au(x)$比$\langle x\rangle$的任意次幂更快地趋向于零。对$Au(x)$的各阶导数亦可收到类似的结论，故知$Au(x)\in\mathscr{S}(R^n)$。连续性则可由$Au(x)$的半范可借助于$\hat{u}$的半范来估计，而$\mathscr{S}(R^n)$与$\hat{\mathscr{S}}(R^n)$拓朴同构而得出。定理的其余部分的证明与定理1.1 的证明是类似的。

§2 条件光滑性、常系数情形

设$P(x,D)$是一具多项式系数的线性偏微分算子。对于方程

$$P(x,D)u=f\tag{2.1}$$

的解的光滑性质可有下述三种描述：

i）对任意$f\in C^\infty(R^n)$，（2.1）在$\mathscr{D}'(R^n)$中的解是无穷可微的；

ii）对任意$f\in\mathscr{S}(R^n)$，（2.1）在$\mathscr{S}'(R^n)$中的解是无穷可微的；

iii）对任意$f\in C_0^\infty(R^n)$，（2.1）在$\mathscr{E}'(R^n)$中的解是无穷可微的。

在这三种情形，我们分别把算子$P(x,D)$称为是$\mathscr{E}$-亚椭园的$\mathscr{S}$-亚椭园的及$\mathscr{D}$-亚椭园的。这三种亚椭园性，后一种总比前一种弱，即条件更强。我们通常所说的亚椭园性（或称严格椭园性）要求成立

$$\text{Sing supp}\,P(x,D)u=\text{sing supp}\,u,\ u\in\mathscr{D}'。$$

它比上面定义的$\mathscr{E}$-亚椭园性更强些。

本节只考虑常系数算子的$\mathscr{S}$-亚椭园性。

设$P(\mathrm{D})$是一常系数线性微分算子。其所对应的多项式$P(\xi)$满足条件

$$|P(\xi)|\geqslant C>0\ ,\quad |\xi|\geqslant a\ 。\tag{2.2}$$

不难看出，如下定义的线性算子

$$Qu(x)=\int e^{ix\xi}\frac{\varphi(\xi)}{P(\xi)}\hat{u}(\xi)đ\xi \tag{2.3}$$

是一个第一类的非正规的拟微分算子，这里

$$\varphi(\xi)\in C^{\infty}(\mathrm{R}^{n})\ ,\quad \varphi(\xi)=\begin{cases}1 & |\xi|\geqslant 2a,\\ 0 & |\xi|=a\ .\end{cases}$$

定理2.1 若常系数算子$P(\mathrm{D})$的符征$P(\xi)$满足条件（2.2），则$P(\mathrm{D})$是$\mathscr{S}$-亚椭园的。

证明 取Q定义如（2.3），则

$$QPu(x)=\int e^{ix\xi}\frac{\varphi(\xi)}{P(\xi)}P(\xi)\hat{u}(\xi)đ\xi=\int e^{ix\xi}\varphi(\xi)\hat{u}(\xi)đ\xi=\int e^{ix\xi}(\varphi(\xi)-1)\hat{u}(\xi)đ\xi$$

$$+u(x)=(I+R)u(x),$$

其中I是恒等算子，算子R的幅函数$\varphi(\xi)-1$是具紧支集的函数，从而是映$\mathscr{S}'$到C^{∞}的光滑算子。由此我们得知，对任意$u\in\mathscr{S}'(\mathrm{R}^n)$，有

$$\text{sing supp } QPu=\text{sing supp } u。$$

若$u\in\mathscr{S}'(\mathrm{R}^n)$是方程$Pu=f$的解，$f\in\mathscr{S}(R^n)$，则据定理1.2，有$QPu=Qf\in\mathscr{S}(\mathrm{R}^n)$，故只能

$$\text{sing supp } u=\phi\ ,$$

于是定理得证。

与〔3〕中结果比较，我们舍弃了解的解析性的讨论，但收到了非齐次方程情形的结果。

§3 具多项式系数的算子的$\mathscr{D}$-亚椭园性

设$P(x,D)$是一具多项式系数的算子，形如

$$P(x,\xi)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\sum_{|\beta|\leqslant l}C_{\alpha,\beta}x^{\beta}\xi^{\alpha}$$

则对$u\in\mathscr{S}(\mathrm{R}^n)$，有

$$\widehat{P(x,D)u}(\xi)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\sum_{|\beta|\leqslant l}C_{\alpha,\beta}(-D_{\xi})^{\beta}(\xi^{\alpha}\hat{u}(\xi))。$$

假设$Q=Q(x,D)$是一非正规的拟微分算子，

$$Qu(x)=\int e^{ix\xi}Q(x,\xi)\hat{u}(\xi)đ\xi,$$

则我们有

$$QPu(x)=\int e^{ix\xi}Q(x,\xi)\sum_{|\alpha|\leqslant m}\sum_{|\beta|\leqslant l}C_{\alpha\beta}(-D_{\xi})^{\beta}(\xi^{\alpha}\hat{u}(\xi))đ\xi,$$

利用$\hat{u}(\xi)\in\mathscr{S}(R^n)$的性质，作分部积分，上式又可改写为

$$QPu(x)=\int e^{ix\xi}\sum_{|\alpha|\leq m}\sum_{|\beta|\leq l}C_{\alpha\beta}\sum\binom{\beta}{\gamma}x^{\gamma}\left(D_{\xi}^{\beta-\gamma}Q(x,\xi)\right)\xi^{\alpha}\hat{u}(\xi)đ\xi。$$

今记

$$R(x,\xi)=\sum_{|\alpha|\leq m}\sum_{|\beta|=l}C_{\alpha\beta}\sum\binom{\beta}{\gamma}x^{\gamma}\left(D_{\xi}^{\beta-\gamma}Q(x,\xi)\right)\xi^{\alpha},$$

显然，$R=QP$仍然是一个非正规的拟微分算子。如果对充分大的ξ，关于x一致地有

$$R(x,\xi)-1=0,$$

则算子$QP-I$是一光滑算子。于是完全仿照定理2.1，我们分别有，对应于Q是非正规的或第一类非正规的，算子P是$\mathscr{D}$-亚椭园的或$\mathscr{S}$-亚椭园的。于是，我们把关于算子$P(x,D)$的条件亚椭园性的讨论归结为具多项式系数的线性偏微分方程

$$\sum_{|\alpha|\leq m}\sum_{|\beta|\leq l}C_{\alpha\beta}\sum\binom{\beta}{\gamma}x^{\gamma}\left(D_{\xi}^{\beta-\gamma}Q(x,\xi)\right)\xi^{\alpha}=1 \qquad (3.1)$$

对充分大的ξ是否有满足（1.4）或（1.5）的光滑解的讨论。以后我们把（3.1）称为基本方程。

基本方程（3.1）的一般讨论大概是相当困难的。在某些特殊情况下我们可以收到一些结果。

定理3.1 设算子P（X，D）的符征具形

$$P(x,\xi)=\sum_{|\alpha|\leq m}(C_{\alpha}x_1+b_{\alpha})\xi^{\alpha},$$

且满足条件

（1）$\quad\left|\sum_{|\alpha|\leq m}C_{\alpha}\xi^{\alpha}\right|\geq C>O,\quad|\xi|\geq a,$

（2）或者$b_{\alpha}=kC_{\alpha}$（k为实数）；或者b_{α}，C_{α}皆为实数；或者b_{α}，C_{α}皆为绝虚数，则算子$P(x,D)$是$\mathscr{D}$-亚椭园的。

证明 对$|\xi|\geq a$，基本方程（3.1）取形为

$$-i\left(\sum_{|\alpha|\leq m}C_{\alpha}\xi^{\alpha}\right)\partial_{\xi_1}Q(x,\xi)+\sum_{|\alpha|\leq m}(C_{\alpha}x_1+b_{\alpha})\xi^{\xi}Q(x,\xi)=1,$$

或者

$$\partial_{\xi_1}Q(x,\xi)+i\frac{\sum_{|\alpha|\leq m}(C_{\alpha}x_1+b_{\alpha})\xi^{\alpha}}{\sum_{|\alpha|\leq m}C_{\alpha}\xi^{\alpha}}Q(x,\xi)=\frac{i}{\sum_{|\alpha|\leq m}C_{\alpha}\xi^{\alpha}}$$

这是一个以x_1及$\xi^1=(\xi_2,\cdots,\xi_n)$为参数的一阶常微分方程，易求出其有（满足零初值

条件的）解为

$$Q(x,\xi)=\left[\int_0^{\xi_1}\frac{-i}{\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}C_\alpha\eta^\alpha}exp(-ix_1\eta_1-i\int_0^{\eta_1}\frac{\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}b_\alpha\theta^\alpha}{\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}C_\alpha\theta^\alpha}\,d\theta_1)d\eta_1\right]\cdot$$

$$\cdot exp\left(ix_1\zeta_1+i\int_0^{\xi_1}\frac{\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}b_\alpha\eta^\alpha}{\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}C_\alpha\eta^\alpha}d\eta_1\right),$$

其中积分号下$\eta=(\eta_1,\xi^1)$，$\theta=(\theta_1,\xi^1)$。由所设条件知，积分$\int_0^{\xi_1}\left(\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}b_\alpha\eta^\alpha/\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}C_\alpha\eta^\alpha\right)d\eta_1$恒为实的；再由条件（1），不难核验确有$Q(x,\xi)$满足（1.4）。于是定理得证。

满足定理3.1 条件的算子是很多的。例如设$S(D)$为任意常系数算子，满足条件

$$|S(\xi)|\geqslant C>0,\ |\xi|\geqslant a\ ,$$

则算子$P(x,D)=(x_1+1)S(D)$就是$\mathscr{D}$-亚椭园的。又设$S(D)$如上，$T(D)$是任意常系数算子，则只要它们的系数同时全为实的或全为纯虚的，算子$P(x,D)=x_1S(D)+T(D)$就是$\mathscr{D}$-亚椭园的。

下面我们考虑较复杂的情形，但仍局限于$P(x,D)$的系数仅与一个变量有关。

定理3.2 设$P(x,D)$具形

$$P(x,D)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\sum_{j\leqslant l}C_{\alpha j}x_1^j\xi^\alpha \tag{3.2}$$

且满足条件

（1）$\left|\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}C_{\alpha l}\xi^\alpha\right|\geqslant C>0$，$|\xi|\geqslant a$，

（2）$b_k=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}c_{\alpha k}\xi^\alpha/\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}c_{\alpha l}\xi^\alpha=b_k(\xi')$，　$0\leqslant k\leqslant l$。

（3）$q^l+\sum\limits_{k=0}^{l-1}(i)^{l-k}\sum\limits_{s=0}^{l-k}b_{k+s}\binom{k+s}{s}x_1^sq^k$

$=\prod\limits_{k=1}^{l}[q+i(x_1+T(\xi')+a_k]$，$a_k\neq a_j$若$k\neq j$，$a_k$是实数，$T(\xi')$是$\xi'$的幂增实函数（例如多项式），

则算子$P(x,D)$就是$\mathscr{D}$-亚椭园的。

证明 此时基本方程（3.1）取形为

$$\sum_{k=0}^{l}\sum_{j=k}^{l}\sum_{|\alpha|\leqslant m}C_{\alpha j}\xi^\alpha\binom{j}{k}x_1^{j-k}(-i)^k\partial_{\xi_1}^kQ(x,\xi)=1$$

或者

$$\partial_{\xi_1}^l Q(x,\xi)+\sum_{k=0}^{l=1}(i)^{l-k}\sum_{k=0}^{l-k}b_{k+s}\binom{k+s}{s}x_1^s\partial_{\xi_1}^k Q(x,\xi)=\frac{(i)^l}{\sum\limits_{|\alpha|<m}c_{\alpha l}\xi^\alpha}。\tag{3.3}$$

由所设条件（2），（3），（3.3）所对应的齐次方程有基本解组$\varphi_1(x_1,\xi),\cdots,\varphi_l(x_1,\xi)$具形

$$\varphi_j(x_1,\xi)=e^{-i(x_1+T(\xi')+a_j)\xi_1}$$

此时（3.3）满足零初值条件的解具形

$$Q(x,\xi)=\Phi(x_1,\xi)\int_0^{\xi_1}\Phi^{-1}(x_1,\eta)\frac{(i)^l}{\sum\limits_{|\alpha|<m}c_{\alpha l}\eta^\alpha}d\eta_1。$$

其中$\Phi(x,\xi)=(\partial^i{}_1\varphi_j(x_1,\xi))$为$l\times l$矩阵，$\Phi^{-1}$是其逆，$\Phi^{-1}(x_1,\xi)$的元素为$|\Phi|^{-1}\Phi^*_{ij}$，$\Phi^*_{ij}$表示$\Phi$中的$i$行$j$列元素的代数余子式，$|\Phi|$表示$\Phi$的行列式。今记$\|\Phi\|$表示$\Phi$的行列式的绝对值，则我们有

$$\|\Phi\|=\prod_{1<j<k<l}|a_j-a_k|>0\ 。$$

结合条件（1），可知$Q(x,\xi)$满足（1.4），于是定理得证。

定理3.1 条件（2）的第一种情形可看作本定理的特例。

本定理可提供又一批$\mathscr{D}$-亚椭园算子的例。例如取$S(D)$为任意常系数算子，

$$|S(\xi)|\geqslant C>0,\qquad |\xi|\geqslant a$$

$T(D')$为任意实系数算子，$D'=(D_2,\cdots,D_n)$，$k_1,k_2\in\mathbf{R}^1$，$k_1\neq k_2$，则多项式

$$P(x,\xi)=S(\xi)\{1+x_1[T(\xi')+k_1+k_2]+x_1^2[T^2(\xi')+(k_1+k_2)T(\xi')+k_1k_2]$$

所对应的算子$P(x,D)$就是$\mathscr{D}$-亚椭园的。具体例子如

$$P(x,\xi)=\xi_1^2\xi_2^2+(3+2x_1)\xi_1^2\xi_2+(2+3x_1+x_1^2)\xi_1^2+2\xi_2^2+(3+2x_1)\xi_2+2+3x_1+x_1^2。$$

我们考虑的显然不限于主型情形。

作者对导师陈庆益教授的热情关怀和舞励表示衷心的感谢。

参 考 文 献

〔1〕L. Hörmander, Fourier Integral Operators, I, Acta Math, 127:1(1971)。
〔2〕M. A. Шубин, Псевдодифференциальные операторы и спектральная Теория, 1978.
〔3〕陈庆益，卷积方程的分类，数学学报，15:4（1965）。