多变量双曲方程组初值问题一类变系数差分格式的稳定性*

汪宏江　马驷良

（吉林大学）

熟知，P. D. Lax[1] 和 H. O. Kreiss[2] 对一类对称双曲方程组的“耗散型”差分格式的稳定性得到了比较完善的结果。但由于条件稍严，实际应用受到限制。朱幼兰等[3] 对一个空间变量情形，取消对称和耗散的限制，建立了较广的一类差分格式的稳定性判别准则，并对大部分常用格式给出了与常系数情形相当的稳定性条件。本文把〔3〕中这一主要结果推广到多个空间变量，并讨论了几种差分格式的稳定性条件。其中，关于非耗散的两步Richtmyer差分格式得到了与常系数情形相当的稳定性条件。

考虑如下双曲方程组

$$(1)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}+A(x,y,t)\frac{\partial u}{\partial x}+B(x,y,t)\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

其中，$u=u(x,y,t)$ 是 N 维向量，A, B 是 N 阶方阵。以下凡向量记号如 $\vec{\omega}$ 均表示 (ω_1,ω_2)，$\sum\limits_{\vec{\omega}}$ 表示 $\sum\limits_{\omega_1}\sum\limits_{\omega_2}$ 且凡形如 C_j, C_j' 均表示正常数。考虑逼近（1）的差分格式

$$(2)\qquad \sum_{h_1=0}\sum_{h_2=0}R^k_{\vec{h},\vec{m}}(\Delta)U^{k+1}_{\vec{m}+\vec{h}}=\sum_{h_1=0}^{H}\sum_{h_2=0}^{H}S^k_{\vec{h},\vec{m}}(\Delta)U^k_{\vec{m}+\vec{k}},$$

其中，$U^k_{\vec{m}}=U(m_1\Delta x, m_2\Delta y, k\Delta t)$，$R^k_{\vec{h},\vec{m}}(\Delta)=R_{h_1,h_2}(m_1\Delta x, m_2\Delta y, k\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta t)$，$S^k_{\vec{h},\vec{m}}(\Delta)=S_{h_1,h_2}(m_1\Delta x, m_2\Delta y, k\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta t)$，$R^k_{\vec{h},\vec{m}}(\Delta)$，$S^k_{\vec{h},\vec{m}}(\Delta)$ 为 N 阶方阵。我们记

$R^k_{\vec{h}\vec{m}}=R^k_{\vec{h},\vec{m}}(\Delta)|_{\Delta x=\Delta y=\Delta t=0}$，$S^k_{\vec{h},\vec{m}}=S^k_{\vec{h},\vec{m}}(\Delta)|_{\Delta x=\Delta y=\Delta t=0}$，若有 $(H+1)^2$ 个 N 阶方阵 $F_{\vec{h}}=F_{h_1,h_2}(h_1,h_2=0,1,\cdots,H)$，便用 $\vec{F}$ 表示 $N\times(H+1)^2N$ 矩阵 $(F_{0,0},F_{0,1},\cdots,F_{0,H},F_{1,H},\cdots F_{H,0},\cdots,F_{H,H})$，用 $F(\vec{\theta})=F(\theta_1,\theta_2)$ 表示 N 阶方阵

$$\sum_{\vec{h}}F_{\vec{h}}e^{i\vec{h}\cdot\vec{\theta}}=\sum_{h_1=0}^{H}\sum_{h_2=0}^{H}F_{h_1,h_2}e^{i(h_1\theta_1+h_2\theta_2)}$$

以下讨论均在 L_2 空间中进行，且在不致混淆处常略去上、下标 $(\ )^k_{\vec{m}}$，规定 $\Delta t/\Delta x$, $\Delta t/\Delta y$, $\Delta x/\Delta t$, $\Delta y/\Delta t$ 是有界量。又作如下假定：

（Ⅰ）存在与 $\vec{\theta}$ 无关的非奇 N 阶方阵 $M^k_{\vec{m}}$, $G^k_{\vec{m}}$，使 $R^k_{\vec{m}}(\vec{\theta})=\sum R^k_{\vec{h},\vec{m}}e^{i\vec{h}\cdot\vec{\theta}}$ 和 $S^k_{\vec{m}}(\vec{\theta})=\sum\limits_{\vec{h}}R^k_{\vec{h},\vec{m}}e^{i\vec{h}\cdot\vec{\theta}}$ 可同时对角化，即 $MR(\vec{\theta})G^{-1}=\Lambda_1(\vec{\theta})$，$MS(\vec{\theta})G^{-1}=\Lambda_2(\vec{\theta})$，

* 1983年 7 月24日收到。

（Ⅱ）$R_{\vec{h}}$，$S_{\vec{h}}$，M，M^{-1}，G，G^{-1} 关于 x，y，t 一致有界且满足 Lipschitz 条件，即每个元素 f 满足

$|f_{m_1+1,m_2}-f_{m_1,m_2}|\leqslant C_1\Delta x$，$|f_{m_1,m_2+1}-f_{m_1,m_2}|\leqslant C_1\Delta y$，$|f_{\vec{m}}^{k+1}-f_{\vec{m}}^{k}|\leqslant C_1\Delta t$。

（Ⅲ）$R_{\vec{h}}$，$S_{\vec{h}}$ 与 $R_{\vec{h}}(\Delta)$，$S_{\vec{h}}(\Delta)$ 有关系

$\|R_{\vec{h}}(\Delta)-R_{\vec{h}}\|\leqslant C_2\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\leqslant C_2'\Delta t$，$\|S_{\vec{h}}(\Delta)-S_{\vec{h}}\|\leqslant C_2\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\leqslant C_2'\Delta t$。

引理 如果对任意实向量 $\vec{\theta}=(\theta_1,\theta_2)$，有

$$\sum_{\vec{l}} D_{\vec{l}}^*(\vec{\theta})E_{\vec{l}}D_{\vec{l}}(\vec{\theta})=0,$$

则矩阵 $Q=\sum_{\vec{l}}\overline{D}_{\vec{l}}^*E_{\vec{l}}\overline{D}_{\vec{l}}$ 的任一“块对角线元素之和”（参见〔31〕）均等于（N阶）零（阵）。这里，

$$D_{\vec{l}}(\vec{\theta})=\sum_{h_1=0}^{H}\sum_{h_2=0}^{H}D_{\vec{h},\vec{l}}e^{i\vec{h}\cdot\vec{\theta}},\tag{3}$$

$D_{\vec{h},\vec{l}}$，$E_{\vec{l}}$ 均是与 $\vec{\theta}$ 无关的 N 阶方阵，$N(H+1)^2$ 阶方阵 Q 是以 N 阶方阵为“块基本元”的 $(H+1)^2$ 阶方阵。

注意对任意整数 s，$0\leqslant s<(H+1)^2$，可唯一表成 $S=s_1(H+1)+s_2$，$0\leqslant s_1$，$s_2\leqslant H$。记〔y〕是不超过实数 y 的最大整数，则 Q 的第 a 个“块对角线元素之和”为

$$A_a=\sum_{\substack{0\leqslant s<(H+1)^2\\0\leqslant s+a<(H+1)^2}}\sum_{\vec{l}}D^*_{s_1,s_2,\vec{l}}E_{\vec{l}}D_{s_1+\left[\frac{s_2+a}{H+1}\right],\,s_2+a-\left[\frac{s_2+a}{H+1}\right](H+1),\,\vec{l}}$$

然后分 $a=h_1(H+1)$ $(0\leqslant h_1\leqslant H)$ 和 $a=h_1(H+1)+h_2$ $(0\leqslant h_1\leqslant H,\ 0\leqslant h_2\leqslant H)$ 两种情形利用级数重排可以证明引理。

定理 双层格式（2）稳定，如果在前面所作假定之下，对任何 $\vec{m}$，$\vec{\theta}$，k，还满足条件：

（i）$V_1(\vec{\theta})=G^*(\Lambda_1^*(\vec{\theta})\Lambda_1(\vec{\theta})-\Lambda_2^*(\vec{\theta})\Lambda_2(\vec{\theta}))G$ 可表示成

$$V_1(\vec{\theta})=\sum_{\vec{l}}D^*_{\vec{l}}(\vec{\theta})\widetilde{M}_{\vec{l}}D_l(\vec{\theta}),$$

（ii） 存在 $C_3>0$，使 $V_2(\vec{\theta})=G^*(\Lambda_1^*(\vec{\theta})\Lambda_1(\vec{\theta})-C_3I)G$ 可表成

$$V_2(\vec{\theta})=\sum_{\vec{l}}P^*_{\vec{l}}(\vec{\theta})\widetilde{\widetilde{M}}_{\vec{l}}P_{\vec{l}}(\vec{\theta}),$$

这里 $D_{\vec{l}}(\vec{\theta})$，$P_{\vec{l}}(\vec{\theta})$ 形如（3），$\widetilde{M}_{\vec{l}}$，$\widetilde{\widetilde{M}}_{\vec{l}}$ 是与 $\vec{\theta}$ 无关的 N 阶非负定方阵，其元素关于 x，y，t 满足 Lipschitz 条件。（对于显示格式，条件（ii）自然满足）。

证明的路线是：引进范数 $\|U^k\|$：

$$\|U^k\|^2=\sum_{\vec{m}}(U^*U)^k_{\vec{m}}\Delta x\Delta y=\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}(U^*U)^k_{\vec{m}}\Delta x\Delta y,$$ 作“能量和”：

$$T^k=\sum\Big(M^k_{\vec{m}}\sum_{\vec{h}}R^{k-1}_{\vec{h},\vec{m}}(\Delta)U^k_{\vec{m}+\vec{h}}\Big)^*\Big(M^k_{\vec{m}}\sum_{\vec{h}}R^{k-1}_{\vec{h},\vec{m}}(\Delta)U^k_{\vec{m}+\vec{h}}\Big)\Delta x\Delta y\tag{4}$$

然后由假定（Ⅱ），（Ⅲ），条件（i）及引理证明

$$T^{k+1}-T^k\leqslant O(\Delta t)\|U^k\|^2\tag{5}$$

再由假定（Ⅱ）、（Ⅲ）及条件（ii）证明

$$C_4\|U^k\|^2\leqslant T^k\leqslant C_4^{-1}\|U^k\|^2\tag{6}$$

于是对于事先给定的常数 J，联合（5）、（6）得到

$$\|U^{k+1}\| \leqslant C(J)\|U^0\|,\ \text{当}\ 0 \leqslant k\Delta t \leqslant J$$

其中常数 $C(J)$ 仅与 J 有关。

对于一般几个空间变量情形，上述引理和定理仍然成立。证明是类似的。只要注意任何小于 $(H+1)^n$ 的非负整数 s 均可表为 $H+1$ 进制数

$$s = s_1(H+1)^{n-1} + s_2(H+1)^{n-2} + \cdots + s_{n-1}(H+1) + s_n$$

下面假定方程组（1）中矩阵 A, B 可同时对角化，即存在 $T = T(x, y, t)$，使

$$A = T^{-1}M_1T,\quad B = T^{-1}M_2T \tag{7}$$

其中 $M_l = M_l(x, y, t) = \mathrm{dign}\{\mu_{l1}, \cdots, \mu_{lN}\}$，$l = 1, 2$ 是实对角阵，T, T^{-1} 关于 x, y, t 一致有界，A, B, T 的每个元素关于 x, y, t 满足 Lipschitz 条件。

熟知，Richtmyer[4] 曾给出计算双曲方程组

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial F(v)}{\partial x} + \frac{\partial G(v)}{\partial y} = 0$$

的如下两步差分格式

$$\begin{cases} V_{j,l}^{n+1} = \frac{1}{4}(V_{j+1,l}^n + V_{j-1,l}^n + V_{j,l+1}^n + V_{j,l-1}^n) \\ \qquad - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(F_{j+1,l}^n - F_{j-1,l}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta y}(G_{j,l+1}^n - G_{j,l-1}^n), \\ V_{j,l}^{n+2} = V_{j,l}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{j+1,l}^{n+1} - F_{j-1,l}^{n+1}) - \frac{\Delta t}{\Delta y}(G_{j,l+1}^{n+1} - G_{j,l-1}^{n+1}) \end{cases} \tag{8}$$

易见，与方程组（1）相应的上述差分格式的形式为

$$U_{m_1+2,m_2+2}^{k+2} = \sum_{h_1=0}^{4}\sum_{h_2=0}^{4} S_{h_1,h_2,m_1,m_2}^k(\Delta)U_{m_1+h_1,m_2+h_2}^k \tag{9}$$

记 $M = \frac{\Delta t}{\Delta x}M_1\sin\theta_1 + \frac{\Delta t}{\Delta y}M_2\sin\theta_2$，$\Lambda(\vec{\theta}) = I - i(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)M - 2M^2$ 则容易算出（参见〔4〕）

$$S(\vec{\theta}) = S_{\vec{m}}^k(\vec{\theta}) = \sum_{h_1=0}^{4}\sum_{h_2=0}^{4} S_{\vec{h},\vec{m}}^k e^{i(h_1\theta_1 + h_2\theta_2)} = e^{i(2\theta_1 + 2\theta_2)}T^{-1}\Lambda(\vec{\theta})T \tag{10}$$

推论 1 Richtmyer 两步格式（8）用于方程组（1）时，只要满足条件（7）和

$$|\mu_{1n}|\frac{\Delta t}{\Delta x} \leqslant \frac{1}{2},\quad |\mu_{2n}|\frac{\Delta t}{\Delta y} \leqslant \frac{1}{2},\quad 1 \leqslant n \leqslant N \tag{11}$$

格式就是稳定的。

证明关键在于验证定理的条件（i），这由下面的等式是不难完成的。

$$I - \Lambda^*(\vec{\theta})\Lambda(\vec{\theta}) = M^2\Big\{2\Big[I - 4\Big(\frac{\Delta t}{\Delta x}\Big)^2M_1^2\Big]\sin^2\theta_1 + 2\Big[I - 4\Big(\frac{\Delta t}{\Delta y}\Big)^2M_2^2\Big]\sin^2\theta_2 \\ + (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)^2I + 4\Big(\frac{\Delta t}{\Delta x}M_1\sin\theta_1 - \frac{\Delta t}{\Delta y}M_2\sin\theta_2\Big)^2\Big\} \tag{12}$$

进一步可以证明更精细的结果。

推论 2 若存在 $\varepsilon > 0$，使 $\mu_{1n}^2 + \mu_{2n}^2 \geqslant \varepsilon > 0$，$1 \leqslant n \leqslant N$ 则格式（8）用于方程组（1）

时，稳定性条件为

(13) $$\mu_{1n}^2\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2+\mu_{2n}^2\left(\frac{\Delta t}{\Delta y}\right)^2\leqslant\frac{1}{2},\quad 1\leqslant n\leqslant N$$

应该指出：1°. Richtmyer 两步格式的增长矩阵（10）的特征值为

(14) $$\lambda_j=\lambda_j(x,y,t,\theta_1,\theta_2)=1-i(\cos\theta_1+\cos\theta_2)\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\mu_{1j}\sin\theta_1+\frac{\Delta t}{\Delta y}\mu_{2j}\sin\theta_2\right)$$
$$-2\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\mu_{1j}\sin\theta_1+\frac{\Delta t}{\Delta y}\mu_{2j}\sin\theta_2\right)^2$$

不难看出对任何网比$\frac{\Delta t}{\Delta x}$，$\frac{\Delta t}{\Delta y}$，它却不满足耗散条件。事实上，当 $\theta_1=\theta_2=\pi$ 时恒有 $\lambda_j=$ $=1$ 。因此不能使用 Lax 和 Kreiss 的结果讨论其稳定性条件。

2°. 当 A，B 是常矩阵时，可以证明，格式（8）稳定的充要条件是（13）。

3°. 当 A，B 是常矩阵，且 $A=B$, $\Delta x=\Delta y$ 时，格式（8）稳定的充要条件是（11)。

对于逼近（1）的一般显式五点差分格式（参见〔5〕)，根据相容性条件可写成如下形式

(15) $$U^{k+1}_{m_1,m_2}=\frac{1}{2}\left(D_1+\frac{\Delta t}{\Delta x}A\right)U^k_{m_1-1,m_2}+\frac{1}{2}\left(D_1-\frac{\Delta t}{\Delta x}A\right)U^k_{m_1+1,m_2}+(I-D_1-D_2)U^k_{m_1,m_2}$$
$$+\frac{1}{2}\left(D_2-\frac{\Delta t}{\Delta y}B\right)U^k_{m_1,m_2+1}+\frac{1}{2}\left(D_2+\frac{\Delta t}{\Delta y}B\right)U^k_{m_1,m_2-1}$$

如果 D_1，D_2 是 A, B 的矩阵多项式，则有

$$TD_lT^{-1}=d_l=\mathrm{dign}\{d_{l1},\cdots,d_{lN}\},\quad l=1,2$$

推论 3 格式（15）稳定的充分条件是：

(16) $$2\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\mu_{1n}^2\leqslant d_{1n}\leqslant\frac{1}{2},\quad 2\left(\frac{\Delta t}{\Delta y}\right)^2\mu_{2n}^2\leqslant d_{2n}\leqslant\frac{1}{2},\quad 1\leqslant n\leqslant N。$$

特别，当 $D_1=2\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2A^2$，$D_2=2\left(\frac{\Delta t}{\Delta y}\right)^2B^2$，格式（15）便是〔5〕中格式（19)；当 $D_1=\frac{1}{3}\left[I+2\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2A^2\right]$，$D_2=\frac{1}{3}\left[I+2\left(\frac{\Delta t}{\Delta y}\right)^2B^2\right]$，格式（15）是〔5〕中格式（20)，它是保单调的格式；当 $D_1=\frac{1}{4}I+\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2A^2$，$D_2=\frac{1}{4}I+\left(\frac{\Delta t}{\Delta y}\right)^2B^2$，格式（15）也是保单调的，它可以看成文〔6〕中格式

$$(L_1v)_j=\frac{1}{2}\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2v_{j-1}+\left(\frac{3}{4}-\mu^2\right)v_j+\frac{1}{2}\left(\mu-\frac{1}{2}\right)^2v_{j+1}$$

在两个空间变量情形的一种推广。由推论 3，这三个格式的稳定性条件均是

$\frac{\Delta t}{\Delta x}\rho(A)\leqslant\frac{1}{2}$，$\frac{\Delta t}{\Delta y}\rho(B)\leqslant\frac{1}{2}$，($\rho(A)$—$A$ 的谱半径）其中，对于第一种格式$\left(D_1=2\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2A^2,\ D_2=2\left(\frac{\Delta t}{\Delta y}\right)^2B^2\right)$还可以证明相应于推论 2 的结论成立。

推论 4 Lax-Wendroff 九点格式[7]用于方程组（1）时稳定的充分条件是

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}\rho(A)\leqslant\frac{1}{\sqrt{8}},\quad \frac{\Delta t}{\Delta x}\rho(B)\leqslant\frac{1}{\sqrt{8}}$$

易见，推论 3—4 给出的稳定性条件与常系数情形的稳定性条件也是相当的。

参 考 文 献

〔1〕Lax, P. D., Comm. Pure Appl. Math., 14(1961), 3, 497—520.

〔2〕Kreiss, H. O., Comm. Pure Appl. Math., 17(1964), 3, 335—353.

〔3〕朱幼兰等，初边值问题差分方法及绕流，科学出版社（1980），123—128.

〔4〕Richtmyer, R. D. and Morton, K. W., Difference methods for initial-value problems, New York, 1967, 360—365.

〔5〕马驷良、刘海楼，高等学校计算数学学报，第1期（1983）

〔6〕Harten, A., Math. Comp., V. 32(1978), 363—389.

〔7〕Lax, P. D. and Wendroff, B., Comm. Pure Appl. Math., V. 17(1964), 381—398.

On the Stability for Difference Approximations to Solutions of Initial Value Problems of Hyperbolic Eguations with Variable Coefficients in Several Space Variables

Wang Hung jiang　　　*Ma Siliang*

(Jilin University)

Abstract

In this paper, main results of stability for difference methods to solutions of initial value problems of hyperbolic equations with variable coefficients in one space variable is generalized to the case of several space variable. As an application of the results, we have discussed stability conditions of some difference schemes with variable coefficients.