

## 可引进群运算的两类平面图

麦 结 华

(广西大学数学系)

在某些文献中,我们常常看到图论与代数的概念及方法的密切联系和交错应用。例如,不久前, Babai等人即考虑了有敏锐的边可迁置换群的有向图,得到了关于这种图的最大外度数的估计的一些定理<sup>[1]</sup>。而Bertram则反过来借助于图论的概念及方法,给出了关于有限群的某些数值(如非交换群中两两可换的一组元素的最大个数,等等)的大小的估计<sup>[2]</sup>。

本文也将讨论群与图之间的联系。我们将使某些平面图的顶点与某些置换群的元素相对应,使顶点的序列与群元素的乘积相对应,然后通过对群的性质的研究,发现相应的平面图的顶点度数的一些规律,并据此解决了某些类型的平面图的存在问题。

§ 1 置换群 $\Phi_3$ 及 $\Psi_4$ 

对任一映射 $f: X \rightarrow Y$ 及 $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ ,下面我们记 $f(x_1, \dots, x_n) = (f(x_1), \dots, f(x_n))$ 。令 $J_n = \{1, \dots, n\}$ ,  $H_n = \{(i, j): i, j \in J_n, i \neq j\}$ 。本文以 $\Phi_3 = \{\varphi_{ij}: (i, j) \in H_3\}$ 表示 $J_3$ 上的全体置换所构成的3次对称群,以 $\psi_4 = \{\psi_{ij}: (i, j) \in H_4\}$ 表示 $J_4$ 上的全体偶置换所构成的4次交错群,其中 $J_3$ 及 $J_4$ 上的置换 $\varphi_{ij}$ 及偶置换 $\psi_{ij}$ 分别由 $\varphi_{ij}(1, 2) = (i, j)$ 及 $\psi_{ij}(1, 2) = (i, j)$ 所决定, $\Phi_3$ 及 $\psi_4$ 的单位元素 $e$ 分别等于 $\varphi_{12}$ 及 $\psi_{12}$ 。

本文还须考虑两个与 $\Phi_3$ 及 $\psi_4$ 反同构的群。对任 $(i, j) \in H_3$ 或 $H_4$ ,分别定义 $\varphi_{ij}^*: H_3 \rightarrow H_3$ 及 $\psi_{ij}^*: H_4 \rightarrow H_4$ 为

$$\begin{aligned}\varphi_{ij}^*(k, l) &= \varphi_{ij}^*(\varphi_{kl}(1, 2)) = \varphi_{kl}\varphi_{ij}(1, 2) = \varphi_{kl}(i, j), \quad (\forall (k, l) \in H_3), \\ \psi_{ij}^*(k, l) &= \psi_{kl}(i, j), \quad (\forall (k, l) \in H_4).\end{aligned}$$

易见 $\varphi_{ij}^*$ 及 $\psi_{ij}^*$ 分别是 $H_3$ 及 $H_4$ 上的置换,令 $\Phi_3^* = \{\varphi_{ij}^*: (i, j) \in H_3\}$ ,  $\psi_4^* = \{\psi_{ij}^*: (i, j) \in H_4\}$ 。作映射 $\zeta: \Phi_3 \rightarrow \Phi_3^*$ 及 $\eta: \psi_4 \rightarrow \psi_4^*$ 为 $\zeta(\varphi_{ij}) = \varphi_{ij}^*$ 及 $\eta(\psi_{ij}) = \psi_{ij}^*$ ,  $(\forall (i, j) \in H_3 \text{ 或 } H_4)$ 。由上面 $\varphi_{ij}^*$ 及 $\psi_{ij}^*$ 的定义易验 $\zeta$ 及 $\eta$ 均是群之间的反同构。

§ 2  $I_2$ 及 $I_3$ 图的顶点的染色

为叙述的方便,本文只考虑2-连通图,有关的图论术语及记号将参照[3]及[4]。

设 $G$ 是个平面图, $\mathcal{F}$ 是 $G$ 的某些已选定的面的集合, $G$ 的无界面及度数大于3的面均属于 $\mathcal{F}$ 。称 $\mathcal{F}$ 中的每一个面为 $G$ (或 $(G, \mathcal{F})$ )中的一个孔。对 $i \geq 0$ ,记 $V_i(G)$ (或 $V_i(G, \mathcal{F})$ ) =  $\{v: v \text{ 是 } G \text{ 中恰属于 } i \text{ 个孔的顶点}\}$ 。令 $\partial V(G) = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i(G)$ 。分别称 $V_0(G)$ 及 $\partial V(G)$ 的点为 $G$ 的内点及边界点。若 $\partial V(G) = V_1(G)$ ,则称 $G$ (或 $(G, \mathcal{F})$ )是个孔离散图。若 $G$ 的每一内点的度数均为某一整数 $n$ 的整数倍,则称 $G$ (或 $(G, \mathcal{F})$ )是个 $I_n$ 图。

\*1982年5月29日收到,1985年10月30日收到修改稿。

设  $f: V(G) \rightarrow J_4$  是  $V(G)$  上的一个 4 色函数。若在  $f$  之下  $G$  的某一个 3 度的有界面  $F$  的三个顶点所染的色的次序 (按该面的边界的逆时针方向, 从其中一个顶点算起) 是下列 4 种情形之一:

$$\begin{array}{ll} 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1; & 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1; \\ 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1; & 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2; \end{array}$$

则称  $f$  在面  $F$  上是有序的。若  $f$  在  $G$  的每一个不属于  $\mathcal{F}$  的面上均有序。则称  $f$  是  $V(G)$  上 (相对于  $(G, \mathcal{F})$ ) 的有序的 4 色函数。

**引理 2.1** 若  $G$  是个只有一个孔  $F$  的  $I_3$  图, 则  $V(G)$  上存在有序的 4 色函数。

**证** 设  $G$  有  $m$  个内点,  $n$  个边界点。当  $m = 0$  时, 通过对  $n$  进行归纳, 易知此时引理 2.1 成立。下面假定当  $m = m_0$  (某  $m_0 \geq 0$ ) 时引理 2.1 成立, 要证当  $m = m_0 + 1$  时该引理仍成立。为此取边  $v_0 v \in E(G)$  使得  $v_0 \in V_0(G)$  且  $v \in V_1(G)$ 。按图 1 所示, 将  $G$  的边  $v_0 v$  分裂成  $v_0 u$  及  $v_0 w$ ,

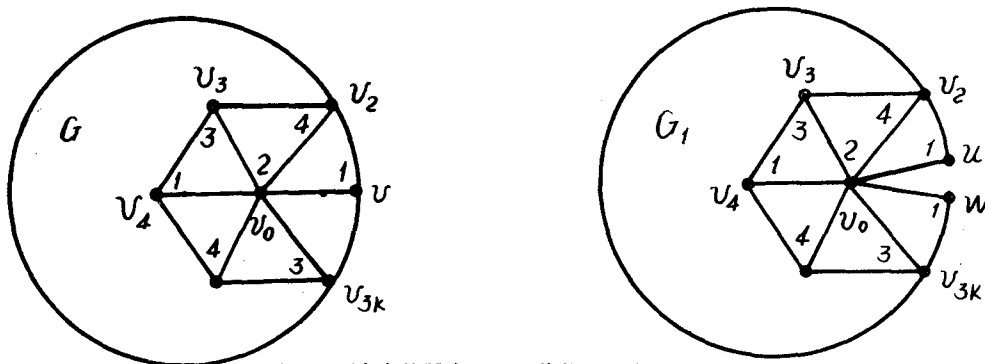


图 1 (顶点旁的数字表示可能的染色之一)

其余不动, 得到一个图  $G_1$ 。因  $G_1$  只有  $m - 1$  个内点, 故  $V(G_1)$  上存在着有序的 4 色函数  $f_1$ 。因  $d_{G_1}(v_0) \equiv 1 \pmod{3}$ , 故  $f_1(u) = f_1(w)$ 。于是, 我们可以令  $f: V(G) \rightarrow J_4$  为  $f|_{V(G)-v} = f_1|_{V(G_1)-\{u, w\}}$ ,  $f(v) = f_1(u)$ 。显然此  $f$  即为  $V(G)$  上的一个有序 4 色函数。引理 2.1 证完。

**引理 2.2** 若  $G$  是个只有一个孔的  $I_2$  图, 则  $V(G)$  可染以 3 色。

**证理 2.2** 的证明与引理 2.1 相似, 在此不再赘述。在文献 [5] 的推论 8.1 及命题 16.1 中, 我们亦可看到与此引理相似的结论。

### § 3 平面图的面 $\Phi_3$ 积及 $\Psi_4$ 积

设  $G$  是个平面图。对任  $v \in V(G)$ , 令

$$\varphi^*(v) = \begin{cases} \varphi_{21}^*, & \text{若 } d(v) \text{ 是奇数;} \\ \varphi_{23}^*, & \text{若 } d(v) \text{ 是偶数,} \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\psi^*(v) = \begin{cases} \psi_{21}^*, & \text{若 } d(v) \equiv 1 \pmod{3}; \\ \psi_{24}^*, & \text{若 } d(v) \equiv 2 \pmod{3}; \\ \psi_{23}^* (= \psi_{24}^* \psi_{21}^* \psi_{24}^*), & \text{若 } d(v) \equiv 0 \pmod{3}. \end{cases} \quad (3.2)$$

据 (3.2) 式及上两节的定义易验如下两个引理:

**引理 3.1** 设  $u, v, w$  是图  $G$  的三个顶点。若  $d(u) + d(w) \equiv d(v) + 1 \pmod{3}$ , 则  $\psi^*(u)(\psi^*(v))^{-1}\psi^*(w) = \psi_{21}^*$ ; 若  $d(u) + d(w) \equiv 2 \pmod{3}$ , 则  $\psi^*(u)\psi_{21}^*\psi^*(w) = \psi_{21}^*$ 。

**引理 3.2** 设  $K_1$  与  $P_n$  的联  $^{[4, P_{21}]}G_0 = K_1 + P_n$  已嵌入平面内如图 2 所示。若  $f$  是  $V(G_0)$  上的在每一有界面均有序的 4 色函数, 则  $(f(u), f(v_n)) = \psi^*(u)(f(v_1), f(u))$ 。

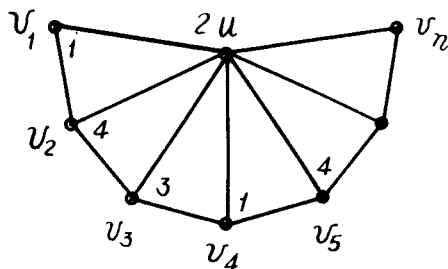


图 2 (顶点旁的数字表示可能的一种染色)

又令  $\varphi(v) = \zeta^{-1}\varphi^*(v)$ ,  $\psi(v) = \eta^{-1}\psi^*(v)$ 。对  $G$  的任一个面  $F$ , 当  $F$  是有界 (或无界) 面时, 规定  $F$  的边界的正方向是逆 (或顺) 时针方向。设  $F$  的顶点 (按正方向, 从某一点算起) 依次是  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , 令  $\varphi(F) = \varphi(v_1)\varphi(v_2)\dots\varphi(v_n)$ ,  $\psi(F) =$

$\psi(v_1)\psi(v_2)\dots\psi(v_n)$ 。分别称  $\varphi(F)$  及  $\psi(F)$  为面  $F$  (相对于起点  $v_1$ ) 的  $\Phi_3$  积及  $\Psi_4$  积。我们有

**定理 3.1** 设图  $G$  是平面上有  $n$  个孔的孔离散图,  $n \geq 1$ , 则下列三个条件等价: (i)  $G$  是个  $I_3$  图且  $G$  的  $n$  个孔的  $\Psi_4$  积均等于单位元素  $e$ ; (ii)  $G$  是个  $I_3$  图且  $G$  有  $n-1$  个孔的  $\Psi_4$  积等于  $e$ ; (iii)  $V(G)$  上存在着有序的 4 色函数。

**证** (A) (i)  $\Rightarrow$  (ii) 是显然的。

(B) 现在我们证明 (iii)  $\Rightarrow$  (i)。首先, 若存在  $v \in V_0(G)$  使得  $d(v) \not\equiv 0 \pmod{3}$ , 则  $V(G)$  上的任一个 4 色函数均不能在环绕  $v$  的那  $d(v)$  个三度面上均有序。因此, 当条件 (iii) 成立时,  $G$  必定是个  $I_3$  图。

其次, 设  $f$  是  $V(G)$  上的一个有序 4 色函数,  $F$  是  $G$  的任一个孔。为证  $\psi(F) = e$ , 不妨设  $F$  的顶点按  $F$  的边界的正方向依次是  $v_1, v_2, \dots, v_m$ 。因  $f$  有序且  $G$  是孔离散的, 故从引理 3.2 可得出

$$(f(v_m), f(v_1)) = \psi^*(v_m)(f(v_{m-1}), f(v_m)) = \psi^*(v_m)\psi^*(v_{m-1})(f(v_{m-2}), f(v_{m-1})) = \dots = \psi^*(v_m)\psi^*(v_{m-1})\dots\psi^*(v_1)(f(v_m), f(v_1))。$$

由此推出  $\psi^*(v_m)\psi^*(v_{m-1})\dots\psi^*(v_1) = e^* (= \psi_{12}^*)$ 。最后即可推出  $\psi(F) = \eta^{-1}(\psi^*(v_m)\psi^*(v_{m-1})\dots\psi^*(v_1)) = e$ 。

(C) 当  $n = 1$  时, 据引理 2.1 知 (ii)  $\Rightarrow$  (iii)。下面假定当  $n = n_0$  (某  $n_0 \geq 1$ ) 时 (ii)  $\Rightarrow$  (iii), 要证当  $n = n_0 + 1$  时仍能如此。为此, 设  $G$  的  $n$  个孔是  $F_1, \dots, F_n$  且  $\psi(F_1) = \dots = \psi(F_{n-1}) = e$ 。取  $G$  中的一条路  $P = v_1v_2\dots v_p$  使得  $\{v_2, \dots, v_{p-1}\} \subset V_0(G)$ ,  $v_1 \in V(F_{i_0})$  (对某  $i_0 \in J_{n-1}$ ,  $V(F_i)$  表示面  $F_i$  的全体顶点的集合),  $v_p \in V(F_n)$ 。为便于叙述, 不妨假定  $i_0 = n-1$ 。按图 3 所示, 将路  $P$  分裂为两条路  $u_1u_2\dots u_p$  及  $w_1w_2\dots w_p$ ,  $G$  的其余部份保持不动。设这样得到的图为  $G_1$ , 则  $G_1$  是个有  $n-1$  个孔的  $I_3$  图且其中至少有  $n-2$  个孔  $F_1, \dots, F_{n-2}$  的  $\Psi_4$  积等于  $e$ 。于是, 据前面的假设知  $V(G_1)$  上存在有序的 4 色函数  $f_1$ 。设图  $G$  中面  $F_{n-1}$  的顶点按正方向依次是  $v_1, x_2, \dots, x_k$ 。又设图  $G_1$  中顶点  $u_i$  及  $w_i$  的度数分别是  $\lambda_i$  及  $\mu_i$ 。则  $i = 1$  或  $p$  时  $\lambda_i + \mu_i = d_G(v_i) + 1$ , 当  $2 \leq i \leq p-1$  时  $\lambda_i + \mu_i = d_G(v_i) + 2 \equiv 2 \pmod{3}$ 。因  $\psi(v_1)\psi(x_2)\dots\psi(x_k) = e$ , 故由引理 3.2 及 3.1 可得

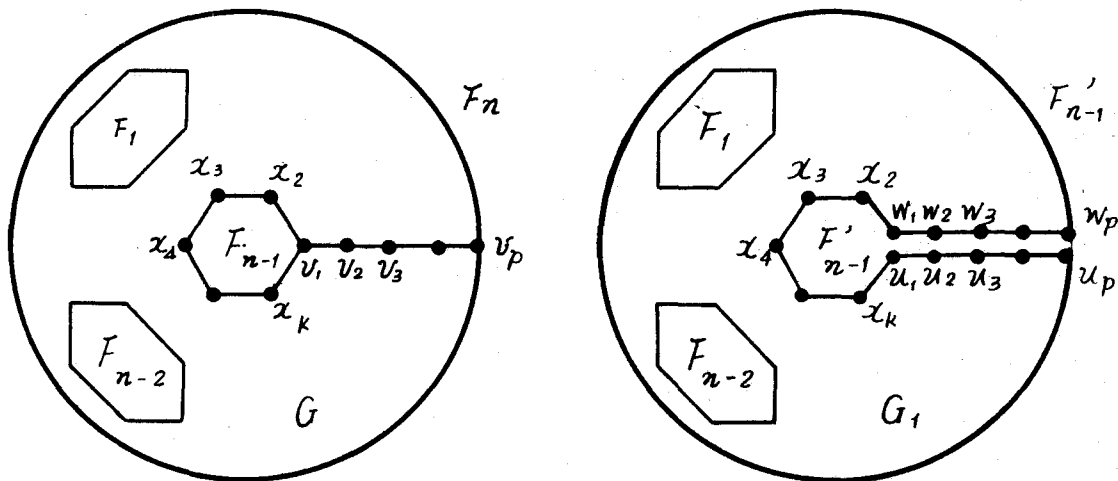


图 3

$$\begin{aligned} f_1(u_1), f_1(u_2)) &= \psi^*(u_1)\psi^*(x_k)\psi^*(x_{k-1})\cdots\psi^*(x_2)\psi^*(w_1)(f_1(w_2), f_1(w_1)) \\ &= \psi^*(u_1)(\psi^*(v_1))^{-1}\psi^*(w_1)(f_1(w_2), f_1(w_1)) = \psi_{21}^*(f_1(w_2), f_1(w_1)) \\ &= (f_1(w_1), f_1(w_2)), \end{aligned}$$

并且, 对  $i = 2, \dots, p-1$ , 从  $(f_1(u_{i-1}), f_1(u_i)) = (f_1(w_{i-1}), f_1(w_i))$  可得

$$\begin{aligned} (f_1(u_i), f_1(u_{i+1})) &= \psi^*(u_i)(f_1(u_{i-1}), f_1(u_i)) \\ &= \psi^*(u_i)\psi_{21}^*\psi^*(w_i)(f_1(w_{i+1}), f_1(w_i)) \\ &= \psi_{21}^*(f_1(w_{i+1}), f_1(w_i)) = (f_1(w_i), f_1(w_{i+1})). \end{aligned}$$

因此, 我们可以令  $f: V(G) \rightarrow J_4$  为

$$f(v) = \begin{cases} f_1(v), & \text{若 } v \in V(G) - \{v_1, \dots, v_p\}; \\ f_1(u_i) = f_1(w_i), & \text{若 } v = v_i, i \in J_p, \end{cases}$$

此  $f$  显然是  $V(G)$  上的一个有序 4 色函数。定理 3.1 证完。

据定理 3.1 或引理 2.1 易推出

命题 3.1 每一个平面图的所有顶点均可染以 4 色, 其充要条件是每一个平面图均是一个只有一个孔的  $I_3$  图的子图。

因本文不拟讨论地图 4 色问题, 故在此不详述命题 3.1 的证明。有兴趣的读者可另参看 [5] 或 [6]。

定理 3.2 设图  $G$  是有  $n$  个孔的孔离散图, 则下列 3 个条件等价: (i)  $G$  是个  $I_2$  图且  $G$  的  $n$  个孔的  $\Phi_3$  积均等于单位元素  $e$ ; (ii)  $G$  是个  $I_2$  图且  $G$  有  $n-1$  个孔的  $\Phi_3$  积等于  $e$ ; (iii)  $V(G)$  是 3 色的。

定理 3.2 的证明与定理 3.1 相似, 在此不再赘述。

#### § 4 只有一个孔的 $I_2$ 图及 $I_3$ 图的性质

运用上节的结论可以推出关于平面图的所有顶点度数的某些性质。本节着重考虑只有一个孔的图。但本节的方法完全适用于可有序地染以 4 色及可染以 3 色的孔离散图。

设  $A = (a_1, \dots, a_n)$  是个正整数的序列,  $n \geq 3$ . 对  $i \in J_1$  及  $j \in J_2$ , 当  $a_i \equiv j \pmod{3}$  时令  $B_i = j$ , 当  $a_i \equiv 0 \pmod{3}$  时令  $B_i = (2, 1, 2)$ . 将长度为 1 或 3 的序列  $B_1, \dots, B_n$  依次连接起来. 设所得到的序列是  $A_1 = (B_1, \dots, B_n) = (b_1, b_2, \dots, b_{n'})$ . 显然该序列的长度  $n' = n + 2 \times (\text{集 } \{i: a_i \equiv 0 \pmod{3}\} \text{ 的元素个数})$ . 又设集  $\{i \in J_1: b_i = 1\} = \{m_1, m_2, \dots, m_k\}$ ,  $\{i \in J_1: a_i \text{ 为奇数}\} = \{p_1, p_2, \dots, p_l\}$ , 其中  $k \geq 0, l \geq 0, 1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_k \leq n', 1 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_l \leq n$ . 令  $A_2 = (m_1, \dots, m_k), A_3 = (p_1, \dots, p_l)$ . 称  $A_r$  为  $A$  的第  $r$  个特征数列 ( $r = 1, 2$  或  $3$ ). 显然, 由  $A$  求出  $A_r$  的运算是十分简便的. 例如, 当  $A = (1, 1, 3, 3, 6, 3, 1)$  时, 容易算出  $A_1 = (1, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 3), A_2 = (2, 3, 6, 7, 8, 10, 12), A_3 = (2, 3, 4, 6, \dots)$ , 而  $A_3$  及  $A_2$  的长度则分别是  $k = 7$  及  $l = 2$ .

对上边数列  $A$  及  $r = 2$  或  $3$ , 以  $G_r(A)$  表示平面上具有如下两个性质的平面图  $G$ : (i)  $G$  只有一个孔  $F$ , 其度数为  $n$ ; (ii)  $F$  的顶点的度数 (按正方向) 依次  $\pmod{3}$  同余于  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . 我们有

**定理 4.1** 设数列  $A = (a_1, \dots, a_n)$  及其特征数列  $A_1 = (b_1, \dots, b_{n'}), A_2 = (m_1, \dots, m_k)$  如上述. 又设  $m_0 = m_k - n'$ . 则图  $G_3(A)$  存在的充分必要条件是  $k \equiv 1 \pmod{3}$ . 且当  $k = 0$  时  $n$  是偶数, 当  $k > 0$  时

$$\sum_{i=1}^{k/3} (m_{3i-2} - m_{3i-3}) \equiv \sum_{i=1}^{k/3} (m_{3i-1} - m_{3i-2}) \equiv \sum_{i=1}^{k/3} (m_{3i} - m_{3i-1}) \equiv 1 \pmod{2} \quad (4.1)$$

**证** 若图  $G_3(A)$  存在, 设它的孔  $F$  的顶点依次是  $v_1, \dots, v_n$ . 则对  $i$  上有  $d(v_i) \equiv a_i \pmod{3}$ . 于是, 令  $A_1 = (B_1, \dots, B_n) = (b_1, \dots, b_{n'})$  如上述. 将 (3.2) 式可知, 当  $B_i = 1$  或  $2$  时  $\psi(v_i) = \psi_{21}$  或  $\psi_{24}$ , 当  $B_i = (2, 1, 2)$  时  $\psi(v_i) = \psi_{14}\psi_{21}\psi_{24}$ . 另一方面, 令  $\psi_{m_j} = \psi_{21}$  ( $b_j = 1$ ) 或  $\psi_{24}$  ( $b_j = 2$ ), 据定理 3.1 知

$$\psi_1 \psi_2 \cdots \psi_{n'} = \psi(v_1) \psi(v_2) \cdots \psi(v_n) = \psi(F) = e. \quad (4.2)$$

若  $k = 0$ , 由 (4.2) 式可得  $\psi_1 \psi_2 \cdots \psi_{n'} = \psi_{21}^{n'} = e$ . 因  $\psi_{21}$  是群  $\Psi_4$  中的二阶元, 又因  $n' - n$  是偶数, 故从  $\psi_{21}^{n'} = e$  可推出  $n$  为偶数. 若  $k > 0$ , 对任一整数  $i$ , 记  $\beta_{2i+1} = \psi_{21}, \beta_{2i+2} = \psi_{34}, \beta_{3i} = \psi_{43}$ . 又记  $\gamma = \psi_{24}$ . 易验  $\gamma \beta_j = \beta_{j+1} \gamma (\forall j \in J_1)$ . 据此运算规律, 我们可以将 (4.2) 式的左边化简, 使其中的  $m - k$  个因子  $\beta_1$  全部移到乘积的左边. 因介于  $\psi_{m_{i-1}}$  与  $\psi_{m_i}$  之间的各个  $\beta_i$  在向左移动的过程中均与  $\gamma$  交换了  $i - 1$  次, 故在移动之后 (4.2) 式变为  $\beta \gamma^k = e$ , 其中  $\beta = \prod_{i=1}^k \beta_i^{m_i - m_{i-1} - 1}$ . 因  $W_0 = \{e, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  构成  $\Psi_4$  的一个可换子群, 故  $\beta \in W_0$ . 于是,  $\beta \gamma^k = e$  可得  $\gamma^k = \beta^{-1} e = \beta$ . 但  $\gamma = \psi_{24}$  是  $\Psi_4$  中的 3 阶元素,  $\gamma$  及  $\gamma^2$  均非  $W_0$  中的元, 故从  $\gamma^k = \beta$  可推出  $k \equiv 0 \pmod{3}$  及  $\beta = e$ . 又因群  $W_0$  中  $\beta_1 \beta_2 \beta_3 = e$  成立的充要条件是  $i_1 \equiv i_2 \equiv i_3 \pmod{2}$ , 故从  $\prod_{i=1}^k \beta_i^{m_i - m_{i-1} - 1} = \beta = e$  及上面  $\beta_i$  的定义可推出 (4.1) 式成立. 定理 4.1 的必要性部份证完.

为证定理 4.1 的充分性, 我们只须用归纳法对每一满足定理所述条件的数列  $A$  作出一个图  $G_3(A)$ . 具体的作法将在 [7] 中给出. 本文限于篇幅, 在此不另详述.

**定理 4.2** 设数列  $A = (a_1, \dots, a_n)$  及其特征数列  $A_2 = (p_1, \dots, p_l)$  如上述. 则平面图  $G_2(A)$  存在的充分必要条件是: (i)  $l$  是偶数; (ii) 当  $l = 0$  时  $n \equiv 0 \pmod{3}$ , 当  $l > 0$  时

$$(p_{2l} - p_{2l-1}) \equiv 2n \pmod{3}.$$

定理4.2的证明与定理4.1相似, 在此不再赘述。

屠规彰教授和李世余副教授曾就与本文有关的群论问题向作者提出了有益的建议, 谨此致谢。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Babai, L., et al., On sharply edge-transitive permutation groups, J. Algebra, 73 (1981), 573—585.
- [ 2 ] Bertram, E. A., Some applications of graph theory to finite groups, Discrete Math., 44 (1983), 31—43.
- [ 3 ] Bondy, J. A. and Murty, U. S. R., Graph Theory with Applications, Macmillan Press, London, 1976.
- [ 4 ] Harary, F., Graph Theory, Addison-Wesley Publishing Company, 1971.
- [ 5 ] 刘彦佩, 平面图的理论及四色问题 (I—IV), 数学研究与评论, 3 (1983), 3:123—136; 4 (1984), 1:121—136; 5 (1985), 1:125—144; 5 (1985), 4:123—136.
- [ 6 ] Ore, O., The FourColor Problem, Academic Press, New York, 1967.
- [ 7 ] 麦结华, 平面图的实现问题 (待发表)
- [ 8 ] Gröbaum, B., Planar maps with prescribed types of vertices and faces, Mathematika, V. 16, Part 1 (1969), No. 31, 28—36.

## Two Types of Planar Graphs in Which Group Operations Can Be Introduced

Mai Jiehua

(Dept. of Math. Guangxi University)

### Abstract

A planar graph  $G$  is called an  $I_n$ -graph if the degree of every its interior vertex is an integer times  $n$ . In this paper we establish corresponding relations between degrees of vertices of the  $I_2$  or  $I_3$ -graph and elements of the symmetric group  $\Phi_3$  of degree 3 or the alternating group  $\Psi_4$  of degree 4. Moreover, we prove that for a hole-discrete  $I_2$  or  $I_3$ -graph  $G$ , the product of the group's elements corresponding to the vertices of every hole is the unit element, iff  $V(G)$  is 3-colorable or orderedly 4-colorable. On these grounds, we find some regularities on degrees of vertices of these planar graphs, and solve a question on existence of planar graphs with some prescribed types of vertices and faces.