1986年3月

数学研究与评论
第六卷 第一期

临界n-棱-连通图的最小度

苏 健 基

(广西师范大学)

〔1〕中定理1给出了临界n-棱-连通图的一个重要性质：临界n-棱-连通图至少有一个n度点。本文采用与〔1〕不同的方法，推广了〔1〕定理1，证明了临界n-棱-连通图至少有2个n度点，而且当$n\geqslant 3$时，这是临界n-棱-连通图n度点个数的最好下界。

§1 一些定义和记号

本文讨论的都是有限阶简单图，没有定义的术语和记号均见于〔2〕。

我们称(x,s)是G的极小点-棱截，如果顶点$x\in G$，s是$G-x$的棱截，并且$|S|=\lambda(G-x)$。设(x,s)是G的一个极小点-棱截，我们说它截G为G_1与G_2两部分，是指：

1°当$|S|\geqslant 1$时，G_1与G_2恰是$G-x-S$的两个分支；

2°当$|S|=0$时，G_1是$G-x$的若干个分支的并图，G_2是$G-x$的其余分支的并图，并且G_1与G_2各至少包含一个$G-x$的分支。

设G是n-棱-连通图，如果对任一$x\in G$都有$\lambda(G-x)\leqslant n-1$，则称G为临界$n$-棱-连通图。由于$G=K^2$是唯一的临界1-棱-连通图（见〔3〕），因此以下均假定$n\geqslant 2$。

设$A,B\subseteq V(G)$，并且$A\cap B=\phi$，G中联结A与B的棱集记为$E_G(A\times B)$，简记为$E(A\times B)$。

§2 极小点-棱截的性质

引理1 设G是n-棱-连通图，(x,S)是G的一个极小点-棱截，它截G为G_1与G_2两部分，而$V(G_1)-V(S)\neq\phi$，若$x'\in V(G_1)-V(S)$，且$\lambda(G-x')\leqslant n-1$，则$G-x'$中一定存在这样一个棱截$S'$，使$(x',S')$是G的极小点-棱截，它截G为这样的两部分$G_1'$与$G_2'$，使$G_1'$满足

$$V(G_1')\subseteq V(G_1)\cup\{x\},\qquad |V(G_1')|<|V(G_1)| \tag{1}$$

证 对给定的x'，任取G的一个极小点-棱截(x',S')，它截G为G_1'与G_2'两部分。下面我们证明：或者S'满足引理要求，或者可以在$G-x'$中另选一个棱截满足引理要求。令

$$V_{1i}=V(G_1)\cap V(G_i'),\quad V_{2i}=V(G_2)\cap V(G_i'),\quad i=1,2。$$

我们分以下几种情形讨论：

1．如果$V_{21}=\phi$或$V_{22}=\phi$

先考虑$V_{21}=\phi$的情形。因为$V(G_1')\subseteq V_{11}\cup V_{21}\cup\{x\}$及$V_{11}\subseteq V(G_1)$，所以这时有

*1982年5月3日收到。

$V(G_1')\subseteq V(G_1)\cup\{x\}$。因为 $x'\neq x$，所以必有 $x\in G_1'$ 或 $x\in G_2'$。

1° 设 $x\in G_1'$。由于 $x'\in V(G_1)-V(s)$，所以 $\Gamma(x')\cap V_{22}=\phi$。因为G是 n-棱-连通图，而 $\lambda(G-x')\leqslant n-1$，所以 $\Gamma(x')\cap V(G_2')\neq\phi$，但 $V(G_2')=V_{12}\cup V_{22}$，所以 $\Gamma(x')\cap V_{12}\neq\phi$，因此 $V_{12}\neq\phi$。任取一 $y\in V_{12}$，易见 $y\in G_1$，$y\notin G_1'$，$y\neq x'$ 及 $x'\in G_1$，$x'\notin G_1'$，因此由 $V(G_1')\subseteq V(G_1)\cup\{x\}$ 即知 $|V(G_1')|\leqslant|V(G_1)|$，因而（1）式成立。

2° $x\in G_2'$，这时 $x\notin G_1'$。由 $V(G_1')\subseteq V(G_1)\cup\{x\}$ 可知 $V(G_1')\subseteq V(G_1)$ 又由 $x'\in G_1$，$x'\notin G_1'$，所以 $|V(G_1')|<|V(G_1)|$，（1）式成立。

如果 $V_{22}=\phi$，令 $G_1''=G_2'$，$G_2''=G_1'$，便有 $V(G_2)\cap V(G_1'')=V_{22}=\phi$。于是从上面的证明，使得 G_1'' 满足（1）。

2．如果 $V_{21}\neq\phi\neq V_{22}$

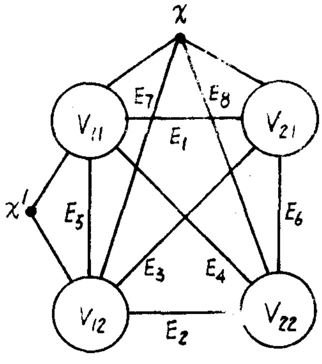

图 1

将棱集 $E(V_{11}\times V_{21})$、$E(V_{12}\times V_{22})$、$E(V_{12}\times V_{21})$、$E(V_{11}\times V_{22})$、$E(V_{11}\times V_{12})$、$E(V_{21}\times V_{22})$、$E(x\times V_{12})$、$E(x\times V_{22})$ 分别简记作 E_1、E_2、E_3、E_4、E_5、E_6、E_7、E_8（见图 1），令 $|E_k|=m_k$，$k=1,\cdots\cdots,8$

因为必有 $x\in G_1'$ 或 $x\in G_2'$，先设 $x\in G_1'$。注意到 $s=E(V(G_1)\times V(G_2))$ 以及 $x'\in V(G_1)-V(s)$，所以 s 恰是互不相交的棱集 E_1，E_2，E_3，E_4 的并集，因此

$$m_1+m_2+m_3+m_4=|s|=\lambda(G-x) \qquad (2)$$

因为 $x\in G_1'$，同理可得

$$m_2+m_4+m_5+m_6+m_7+m_8=|s'|=\lambda(G-x') \qquad (3)$$

记 V_{21} 在 $V(G-x)$ 中的补集为 $\overline{V}_{21}$，易见 $\overline{V}_{21}\neq\phi$，且 $E(\overline{V}_{21}\times V_{21})$ 是互不相交棱集 E_1，E_3，E_6 的并集，而 $E(\overline{V}_{21}\times V_{21})$ 是 $G-x$ 的棱截，因此

$$m_1+m_3+m_6\geqslant\lambda(G-x) \qquad (4)$$

因为 $x\in G_1'$，由情形 1 中 1° 的证明可知 $V_{12}\neq\phi$。记 V_{12} 在 $V(G-x')$ 中的补集为 $\overline{V}_{12}$，易见 $\overline{V}_{12}\neq\phi$，同理可得

$$m_2+m_3+m_5+m_7\geqslant\lambda(G-x') \qquad (5)$$

由（2）、（4）与（3）式可推得 $m_2+m_3+m_5+m_7\leqslant\lambda(G-x')$，注意到（5）式即得 $m_2+m_3+m_5+m_7=\lambda(G-x')$。但 $|E(\overline{V}_{12}\times V_{12})|=m_2+m_3+m_5+m_7$，如果记 $s''=E(\overline{V}_{12}\times V_{12})$，则 $|s''|=\lambda(G-x')$，因此 (x',s'') 也是G的极小点-棱截。令 $G_1''=G[V_{12}]$，$G_2''=G-x'-V_{12}$，则 G_1'' 与 G_2'' 是 (x',s'') 截得G的两部分。此时易见 G_1'' 满足（1）。

如果 $x\in G_2'$，令 $G_1''=G_2'$，$G_2''=G_1'$，便有 $x\in G_1''$。于是，从上面的证明也知引理成立．证毕。

引理 2 在引理 1 中把条件"G是 n-棱-连通图"改为"G是临界 2-棱-连通图"，则（1）式可改进为

$$V(G_1')\subseteq V(G_1),\quad |V(G_1')|<|V(G_1)| \qquad (6)$$

证 由引理 1 的证明可知，只要对引理 1 中情形 1 的 1° 证明满足（6）式即可。设 $x\in G_1'$ 及 $V_{21}=\phi$，由引理 1 的证明可知，这时必有 $V_{12}\neq\phi$。我们仍采用情形 2 中的记号，这时（2）与（3）式仍成立。因为 $V_{21}=\phi$，所以 $m_1=m_3=m_6=0$，由于G是临界 2-棱-连通图，因而

由（2）与（3）式可得

$$m_2+m_4=\lambda(G-x)\leqslant 1 \tag{7}$$

$$m_4+m_5+m_7+m_8=\lambda(G-x')\leqslant 1 \tag{8}$$

因为$\lambda(G)\geqslant 2$，而$\lambda(G-x)\leqslant 1$，所以$\Gamma(x)\cap V(G_2)\neq\phi$，而$V_{21}=\phi$，所以$m_8=|E_8|=|\Gamma(x)\cap V_{22}|\geqslant 1$，由（8）式可得$m_4=m_5=m_7=0$，$m_8=\lambda(G-x')=1$。由于$V_{12}\neq\phi$，由引理1中情形2的证明可知（5）式成立，因而$m_2\geqslant\lambda(G-x')=1$，由（7）式即得$\lambda(G-x)=m_2=1$。令$s''=E_2$，$G_1''=G[V_{12}]$，$G_2''=G-x'-V_{12}$，则（$x'$，$s''$）是G的极小点-棱截，$G_1''$与$G_2''$是（$x'$，$s''$）截G所得的两部分，且$G_1''$满足（6）式。当$V_{22}=\phi$，$x\in G_2'$时，可类似证明，证毕。

§3　临界n-棱-连通图的最小度

定理1　设G是临界n-棱-连通图，(x,s)是G的任一个极小点-棱截，它截G为G_1与G_2两部分，则$V(G_1)\cup\{x\}$与$V(G_2)\cup\{x\}$中各至少有一个G的n度点。

证　假设$V(G_1)\cup\{x\}$中无G的n度点，我们设法引出矛盾。如果$V(G_1)-V(s)=\phi$，则必有$|V(G_1)|=1$或$n-1$，这时G_1中每一顶点都是G的n度点，与假设矛盾，因此$V(G_1)-V(s)\neq\phi$。任取一$x'\in V(G_1)-V(s)$，由引理1知存在这样的极小点-棱截（x'，s'），它截G为这样的两部分G_1'与G_2'，使得

$$V(G_1')\subseteq V(G_1)\cup\{x\},\quad |V(G_1')|<|V(G_1)|$$

因为$V(G_1')\cup\{x_1'\}\subseteq V(G_1)\cup\{x\}$，所以$V(G_1')\cup\{x'\}$中也无G的$n$度点，同理可知$V(G_1')-V(s')\neq\phi$。重复上述讨论，可得无限多个顶点集

$$V(G_1),\ V(G_1'),\ \cdots\cdots,\ V(G_1^{(k)}),\ \cdots\cdots$$

其中

$$V(G_1^{(k)})\subseteq V(G_1)\cup\{x\},\quad k=1,2,\cdots\cdots$$

并有

$$|V(G_1)|>|V(G_1')|>\cdots\cdots>|V(G_1^{(k)})|>\cdots\cdots$$

这与G的有限阶相矛盾，故$V(G_1)\cup\{x\}$中有G的n度点。对$V(G_2)\cup\{x\}$可作类似证明。证毕。

由此即得〔1〕中定理1

推论　设G是临界n-棱-连通图，则$\delta(G)=n$。

由该推论可知，对于临界n-棱-连通图必有$\delta(G)=n$。

利用引理2，类似于定理1可以证明：

定理2　设G是临界2-棱-连通图，(x,s)是G的任一极小点-棱截，它截G为G_1与G_2两部分，则G_1与G_2中各至少有一个G的2度点。

利用引理2与定理2，可以证明阶数大于3的临界2-棱-连通图至少有4个2度点，这一结论朱必文已在〔4〕中得到。对于$n\geqslant 3$，我们有

定理3　设G是临界n-棱-连通图，则G至少有2个n度点。

证　如果G中每一顶点都是n度点，定理显然成立。现假设x是G的一个非n度点，取

G的极小点-棱截（x, s），它截G为G_1与G_2两部分。由定理 1 并注意到$d(x)>n$，即知本定理成立。证毕。

设G是临界n-棱-连通图，则 $|V(G)|\geqslant n+1$，并且 $|V(G)|=n+1$ 的充要条件是$G=K^{n+1}$。下面我们给出阶数大于$n+1$的临界n-棱-连通图的例子。

例 设$n\geqslant 3$。取两个顶点x_1与x_2及完全图$K^{n+1}=K^{n-3}+K^4$，将K^{n-3}中每一顶点与x_1、x_2各联一条棱，将K^4中的两个顶点各与x_1联一条棱但与x_2不联棱，将K^4中其余两个顶点各与x_2联一条棱但与x_1不联棱、这样得到的图记作H_n（见图 2）。不难看出H_n是临界n-棱-连通图，x_1与x_2是H_n仅有的 2 个 n 度点。

上述例子告诉我们，对任一$n\geqslant 3$，总存在仅有 2 个 n 度点的临界 n-棱-连通图，因此当 $n\geqslant 3$时，定理 3 给出了临界n-棱-连通图 n 度点个数的最好下界。

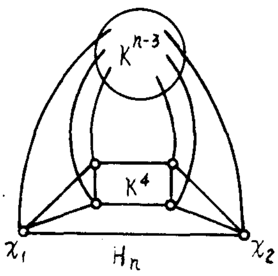

图 2

取 m个图H_n的复本，依次将一个复本的 n 度点与另一个复本的 n 度点重合，使首尾两个复本各有一个 n 度点，这样得到的图仍旧是仅有 2 个 n 度点的临界 n-棱-连通图，但其阶增大为$m(n+2)+1$。这告诉我们对给定的 $n\geqslant 3$，存在阶数为任意大的仅有 2 个 n 度点的临界 n-棱-连通图，临界 n-棱-连通图的这一性质是与极小n-连通图及极小n-棱-连通图很不相同的（见〔5〕）。

朱必文、李永洁同志对本文初稿提出了许多宝贵意见，谨对他们表示衷心地感谢。

参 考 文 献

〔1〕李永洁，关于临界 n-棱-连通图，华中工学院学报，4(1981)，23—28。

〔2〕Bollobás, B., Extremal graph theory, Academic Press, London, 1978.

〔3〕Lick, D.R., Minimally n-line connected graphs, J.Reine Angew.Math. 252(1972), 178—182.

〔4〕朱必文，临界 2-棱-连通图，应用数学学报，6(1983)，292—301

〔5〕Nebesky, L., The minimum degree and connectivity of a graph, in "Theory and Applications of Graphs" (Proceedings, Michigan 1976), Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1978, 412—419.

The Winimum Degree of a Critically n-Line-Connected Graph

Shu Jian-ji（苏健基）

Absfract

A graph G is said to be Critically n-line-connected if it is n-line-connected. but for each $x\in G$, $\lambda(G-x)\leqslant n-1$. The following result is proved: Every critically n-line-connected graph contains at least two vertices of degree n, and then this lower bound is best possible as $n\geqslant 3$.